مجلة Top Maths

3As M TM

مجلة الاعداد المركبة

complex number

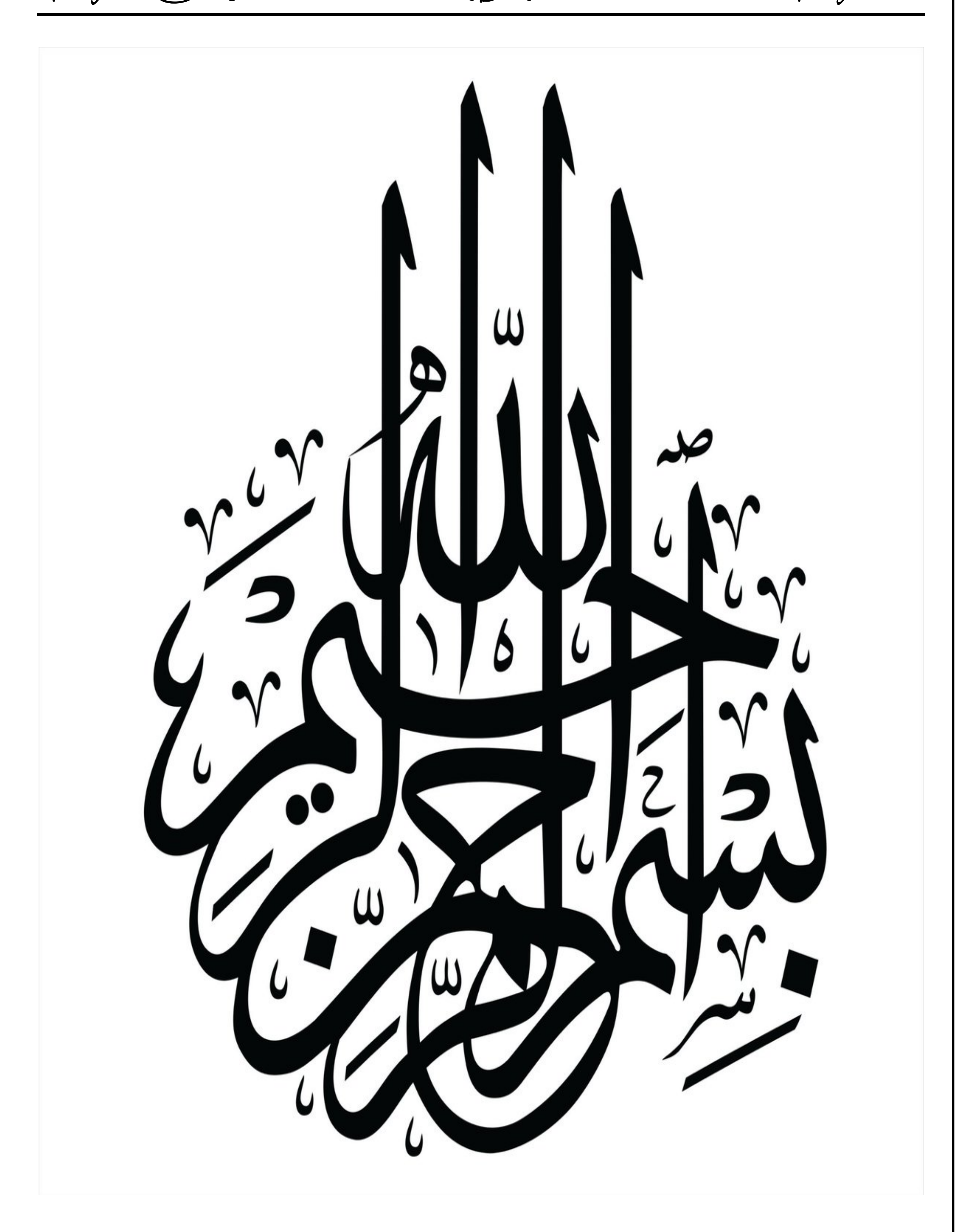
المجلة تتضمن

- ✓ درس مفصل
- ✓ ملخص
- ✓ تمارين تدريبية
- ✓ تمارين شاملة
- ✓ باكالوريات سابقة

اعداد الاستاذ بوشناق يوسف



فيفري 2020


بسم الله الرحمن الرحيم

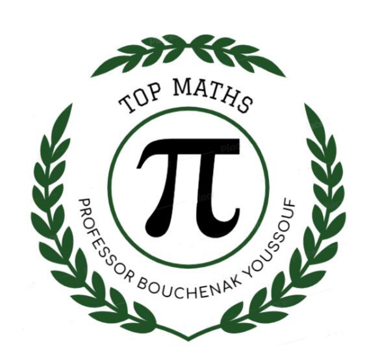
بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم ......

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

لقد اتممت من اعداد المجلة الخاصة بالاعداد المركبة خاصة بالاقسام النهائية شعب العلمية

اقدم لكم ابنائي الطلبة و اخواني الاساتذة هذا العمل و الذي يحتوي على



» رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِي مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِي مِن تَأْوِيلِ الْأَحَادِيثِ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ أَنتَ وَلِيِّي فِي الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِي بِالصَّالِحِينَ «

لا تنسونا بالدعاء محبكم في الله الاستاذ بوشناق يوسف

ملخص

تعريف

الكتابة $z=a+bi$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z ؛

ملاحظات

العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z

والعدد الحقيقي b يسمى جزءه التخيلي ونكتب

$a=\text{Re}(z)$ و $b=\text{Im}(z)$

إذا كان $b=0$ فإن $z=a$ وهو عدد حقيقي إذن $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

إذا كان $a=0$ فإن $z=bi$ هو ليس حقيقيا ويسمى عددا مركبا تخيليا **صرفا** (بحتا)

إذا كان $a=0$ و $b=0$ فإن $z=0$ عدد مركب معدوم.

تساوي عددين مركبين

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي.

أي إذا كانت a ، b ، α و β أعداد حقيقية لدينا:

$a+bi=\alpha+\beta i$ تكافئ $(a;b)=(\alpha;\beta)$ وتكافئ $a=\alpha$ و $b=\beta$.

خواص:

1) M و M' نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z=a+bi$ و $z'=a'+b'i$ المكتوبان على الشكل الجبري

* لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ هي العدد المركب $z'-z=a'-a+(b'-b)i$.

* $OM=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\sqrt{a^2+b^2}$ و $MM'=\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|=\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2}$.

* لاحقة منتصف القطعة $[MM']$ هي العدد المركب $\dfrac{z+z'}{2}$.

لاحقة المرجح

G للجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ هي العدد المركب $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

$\overrightarrow{P}$ و $\overrightarrow{Q}$ شعاعا من المستوي لاحقتاهما z و z' على الترتيب؛ k عدد حقيقي.

* لاحقة الشعاع $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{Q}$ هي العدد المركب $z+z'$.

* لاحقة الشعاع $k.\overrightarrow{P}$ هي العدد المركب kz .

مرافق عدد مركب

z عدد مركب مكتوب في الشكل الجبري $a+bi$.

مرافق العدد المركب z هو عدد المركب $a-bi$ ونرمز له بـ : $\overline{z}$.

خواص:

من أجل كل عددين مركبين z و z' لدينا:

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ $\qquad$ $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$

$\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$ مع $z\neq 0$ $\qquad$ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ مع $z'\neq 0$

طويلة وعمدة عدد مركب

طويلة العدد المركب z ونرمز إليها بالرمز $|z|$.

لدينا $|z|=OM=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ وإذا كان $z=a+bi$ فإن $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

خواص الطويلة:

$z\overline{z}=|z|^2$ $\qquad$ $|\overline{z}|=|z|=|-z|$

$|zz'|=$ $\qquad$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$ مع $z'\neq 0$

نتيجة:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا $|z^n|=|z|^n$.

عمدة عدد مركب

عمدة للعدد المركب كل قيسا للزاوية $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ و نرمز لها بـ $Arg\left(z\right)$.

إذا كان $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)=\theta$ فإن $Arg\left(z\right)=\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

كل عدد مركب غير معدوم z يكتب على الشكل

$$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$$

حيث $r=|z|$ و $Arg\left(z\right)=\theta$.

هذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب z .

$$\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{x}{r}\\ \sin(\theta)=\dfrac{y}{r}\end{cases}\qquad r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

خواص العمدة:

z و z' عددان مركبان غير معدومين:

$$Arg\left(zz'\right)=Arg\left(z\right)+Arg\left(z'\right)$$

$$Arg\left(\frac{z}{z'}\right)=Arg\left(z\right)-Arg\left(z'\right)$$

$$Arg\left(\frac{1}{z}\right)=-Arg\left(z'\right) .$$

نتيجة:

من أجل كل $n\in\mathbb{Z}^*$ ، $\arg\left(z^n\right)=n\arg\left(z\right)$

ترميز أولير:

θ عدد حقيقي؛ يرمز للعدد $\cos\theta+i\sin\theta$ بالرمز $e^{i\theta}$

ونكتب $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

ملاحظات:

* $e^{-i\theta}=\cos-\theta+i\sin-\theta=\cos\theta-i\sin\theta$ ؛

$\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.

* إذا كان z عددا مركبا غير معدوم، طويلته r و θ عمدة له فإن

$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=re^{i\theta}$.

$z=re^{i\theta}$ يسمى الشكل الأسّي للعدد المركب z .

نتائج:

دستور أولير

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \quad ؛ \quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

دستور موافر:

$$\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta} \quad ؛ \quad \left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta .$$

خواص:

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')} \qquad e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$$

$$-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta} .$$

خواص هندسية:

نتائج:

* $\overrightarrow{AB}$ يعامد $\overrightarrow{CD}$ معناه

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ ومعناه

$\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ تخيلي صرف.

* $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا معناه

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=k\pi$ ومعناه $\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ حقيقي.

الجدران التربيعيان لعدد مركب:

ليكن $z=\alpha+i\beta$ و $\delta=x+iy$ حيث $\delta^2=z$.

$\delta^2=z$ معناه $x^2-y^2+2xyi=\alpha+i\beta$ ومعناه

$x^2-y^2=\alpha$ و $2xy=\beta$.

لدينا $\left|\alpha^2\right|=|z|$ معناه $|\delta|^2=x^2+y^2$ أي $x^2+y^2=r$.

ملاحظة:

كل عدد مركب يقبل جذرين تربيعيين متعاكسين.

مجموعة الأعداد المركبة

التعريف 1:

نسمي المجموعة $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة عناصرها من الشكل $z=a+bi$ حيث a و b عددان حقيقيان و $i^2=-1$.

الكتابة $z=a+bi$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z ؛ وهي الكتابة الوحيدة.

العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z والعدد الحقيقي b يسمى جزءه التخيلي ونكتب $a=\operatorname{Re}(z)$ و $b=\operatorname{Im}(z)$

ملاحظات:

إذا كان $b=0$ فإن $z=a$ وهو عدد حقيقي إذن $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

إذا كان $a=0$ فإن $z=bi$ هو ليس حقيقيا ويسمى عددا مركبا تخيليا صرفا (بحتا)

إذا كان $a=0$ و $b=0$ فإن $z=0$ عدد مركب معدوم.

تطبيق

عين $\operatorname{Re}(z)$ و $\operatorname{Im}(z)$ في كل حالة من الحالات التالية :

$z=3+2i$ ؛ ؛ $z=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ؛ ؛ ؛ $z=-i\sqrt{3}$.

حل:

$\operatorname{Re}(3+2i)=3$ ؛ $\operatorname{Im}(3+2i)=2$ ؛ $\operatorname{Re}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ؛ $\operatorname{Im}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$ ؛ $\operatorname{Re}\left(-i\sqrt{3}\right)=0$ ؛

$\operatorname{Im}\left(-i\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}$.

تمرين:

ليكن $z=2+3i$ ؛ $z'=i-5$. أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الجبري: $2z-3z'$ ؛ zz' ؛ z^2 .

حل:

$$2z-3z'=4+6i-3i+15=19+3i$$

$$zz'=(2+3i)(i-5)=2i-10-3-15i=-13-13i$$

$$z^2=4+12i-9=-5+12i \; .$$

تمرين:

برّر أن العددين $(1+i)^8$ و $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2020}$ حقيقيان.

حل

$(1+i)^8=\left[(1+i)^2\right]^4=\left[(2i)^2\right]^2=16$ ؛ $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2020}=\left[\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{1010}=\left(\frac{-2i}{2}\right)^{1010}=\left[(-i)^2\right]^{505}=1$.

خاصية:

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي.

أي إذا كانت a ، b ، α و β أعداد حقيقية لدينا: $a+bi=\alpha+\beta i$ تكافئ $(a;b)=(\alpha;\beta)$ وتكافئ $a=\alpha$ و $b=\beta$.

تمرين:

z عدد مركب حيث : $z=(x^2+x)+i(x^2+y-1)$.

عين العددين الحقيقيين x و y حتى يكون العدد المركب z معدوما.

حل:

$z=0$ معناه $\text{Re}(z)=0$ و $\text{Im}(z)=0$ معناه $x^2+x=0$ و $x^2+y-1=0$ أي $x(x+1)=0$ و $y=1-x^2$.

لدينا $x(x+1)=0$ معناه $x=0$ أو $x=-1$. إذا كان $x=0$ فإن $y=1$ وإذا كان $x=-1$ فإن $y=0$ وبالتالي:

$z=0$ معناه $(x;y)=(0;1)$ أو $(x;y)=(-1;0)$.

التفسير الهندسي لعدد مركب

تعريف:

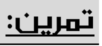
المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

لكل نقطة $M(x;y)$ من المستوي نرفق العدد المركب $z=x+iy$.

نقول أن النقطة M هي صورة العدد المركب z أو الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هو الصورة الشعاعية للعدد المركب z.



z يسمى لاحقة النقطة M أو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OM}$.



تمرين:

1) عين إحداثيي النقطة D ذات اللاحقة $z_D=\sqrt{3}+3i$.

2) عين اللواحق z_A ، z_B و z_C للنقط $A(\sqrt{3};1)$ ، $B(-\sqrt{3};-1)$ و $C(0;2)$ على الترتيب.

حل:

1) $D(\sqrt{3};3)$.

2) تعيين اللواحق: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=-\sqrt{3}-i$ و $z_C=2i$.

تمرين:

في كل حالة من الحالات التالية ، مثل مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة:

أ. $\text{Re}(z)=-3$.　　ب. $\text{Im}(z)=2$.　　جـ. $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)$.

حل:

نعتبر العدد المركب $z=x+iy$ مع x و y عددين مركبين.

أ. $\text{Re}(z)=-3$ معناه $x=-3$ إذن مجموعة النقط M هي المستقيم D_1 ذو المعادلة $x=-3$.

ب. $\text{Im}(z)=2$ معناه $y=2$ إذن مجموعة النقط M هي المستقيم D_2 ذو المعادلة $y=2$.

جـ. $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)$ معناه $y=x$ إذن مجموعة النقط M هي المنصف الأول.

تمرين:

نرفق بكل نقطة $M\left(x;y\right)$ ذات اللاحقة z ، النقطة $M'\left(x';y'\right)$ ذات اللاحقة z' حيث:

$z'=z^2-2\left(1+i\right)z$.

1) عبر عن x' و y' بدلالة x و y .

2) $\mathcal{H}$ هي مجموعة النقط M بحيث يكون z' حقيقيا . برهن أن $\mathcal{H}$ هي منحني دالة h يطلب تعيينها .

حل:

1) لدينا: $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$. $z'=z^2-2\left(1+i\right)z$ معناه $x'+iy'=\left(x+iy\right)^2-2\left(1+i\right)\left(x+iy\right)$ ومعناه

$x'+iy'=x^2-y^2+2ixy-2x-2iy-2ix+2y=x^2-y^2-2x+2y+2\left(xy-y-x\right)i$.

إذن $x'=x^2-y^2-2x+2y$ و $y'=2\left(xy-y-x\right)$.

2) z' حقيقي معناه $y'=0$ ومعناه $xy-y-x=0$ أي $y\left(x-1\right)=x$ ؛ إذا كان $x=1$ فإن $0=1$ وهذا تناقض إذن

$x\neq 1$ وبالتالي $y=\dfrac{x}{x-1}$ وهي معادلة المنحني $\mathcal{H}$ للدالة $f:x\mapsto\dfrac{x}{x-1}$.

خواص:

1) M و M' نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $z=a+bi$ و $z'=a'+b'i$ المكتوبان على الشكل الجبري

* لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ هي العدد المركب $z'-z=a'-a+\left(b'-b\right)i$.

* $OM=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|=\sqrt{a^2+b^2}$ و $MM'=\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|=\sqrt{\left(a'-a\right)^2+\left(b'-b\right)^2}$.

* لاحقة منتصف القطعة $\left[MM'\right]$ هي العدد المركب $\dfrac{z+z'}{2}$.

2) لاحقة المرجح G للجملة $\left\{\left(A;\alpha\right);\left(B;\beta\right);\left(C;\gamma\right)\right\}$ هي العدد المركب $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.

3) $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ شعاعا من المستوي لاحقتاهما z و z' على الترتيب؛ k عدد حقيقي.

* لاحقة الشعاع $\vec{P}+\vec{Q}$ هي العدد المركب $z+z'$.

* لاحقة الشعاع $k.\vec{P}$ هي العدد المركب kz .

نشاط:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. $M\left(x;y\right)$ نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z .

M' نظيرة M بالنسبة إلى محور الفواصل ؛ نرمز بِ: $\bar{z}$ للاحقة النقطة M' .

أكتب z و $\bar{z}$ على الشكل الجبري ثم أحسب $z+\bar{z}$ ؛ $z-\bar{z}$ و $z\bar{z}$.

حل النشاط:

1) لدينا $M\left(x;y\right)$ ومنه $M'\left(x;-y\right)$ وبالتالي $z=x+iy$ و $\bar{z}=x-iy$.

$z+\bar{z}=x+iy+x-iy=2x$

$z-\bar{z}=x+iy-x+iy=2iy$

$z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2$.

مرافق عدد مركب

التعريف:

z عدد مركب مكتوب في الشكل الجبري $a+bi$.

مرافق العدد المركب z هو عدد المركب $a-bi$ ونرمز له بِ : $\overline{z}$.

تمرين:

أعط مرافق لكل من الأعداد المركبة التالية : $z_1=2+4i$ ؛ $z_2=3-i$ ؛ $z_3=i\sqrt{2}-3$ ؛ $z_4=-\frac{5}{2}i$.

حل:

$\overline{z_1}=2-4i$ ؛ $\overline{z_2}=3+i$ ؛ $\overline{z_3}=-3-i\sqrt{2}$ ؛ $\overline{z_4}=\frac{5}{2}i$.

ملاحظات:

* النقطتان M_z و $M_{\overline{z}}$ صورتا العددين المركبين المترافقين، هما متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل.

* إذا كان $z=a+bi$ فإن $z\overline{z}=a^2+b^2$ وهو عدد حقيقي موجب نستعمله خاصة في كتابة الكسور على شكلها الجبري.

تمرين:

أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري .

$z_1=\frac{4-6i}{3+2i}$ ؛ $z_2=\frac{5+15i}{1+2i}$ ؛ $z_3=\frac{1+i}{1-i}$.

حل:

$$z_1=\frac{4-6i}{3+2i}=\frac{(4-6i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{-30}{13}i$$ ؛

$$z_3=\frac{1+i}{3-i\sqrt{2}}=\frac{(1+i)(3+i\sqrt{2})}{(3-i\sqrt{2})(3+i\sqrt{2})}=\frac{3-\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})i}{11}=\frac{3-\sqrt{2}}{11}+\frac{3+\sqrt{2}}{11}i$$ ؛

$$z_3=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1-1+2i}{2}=i$$.

نتائج:

من أجل كل عدد مركب z . $\overline{\overline{z}}=z$ ؛ $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$ و $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$.

z حقيقي معناه $z=\overline{z}$ و z تخيلي صرف معناه $z=-\overline{z}$.

خواص:

من أجل كل عددين مركبين z و z' لدينا:

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ ، $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$ ، $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ مع $z\neq 0$ ، $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ مع $z'\neq 0$

تمرين:

نضع : $z_1 = \dfrac{3-i}{2+5i}$ و $z_2 = \dfrac{3+i}{2-5i}$.

1) بدون إجراء الحساب برر أن $z_1 + z_2$ هو عدد حقيقي و $z_1 - z_2$ هو عدد تخيلي صرف .

2) أحسب $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ ثم استنتج الشكل الجبري للعدد المركب z_1 .

حل:

1) لدينا $z_2 = \dfrac{3+i}{2-5i} = \dfrac{\overline{3-i}}{\overline{2+5i}} = \overline{\left(\dfrac{3-i}{2+5i}\right)} = \overline{z_1}$ إذن $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\operatorname{Re}(z_1)$ وهو عدد حقيقي.

$z_1 - z_2 = z_1 - \overline{z_1} = 2i\operatorname{Im}(z_1)$ وهو تخيلي صرف.

2) $z_1 + z_2 = \dfrac{3-i}{2+5i} + \dfrac{3+i}{2-5i} = \dfrac{(3-i)(2-5i)+(3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \dfrac{1-17i+1+17i}{29} = \dfrac{2}{29}$

$z_1 - z_2 = \dfrac{3-i}{2+5i} - \dfrac{3+i}{2-5i} = \dfrac{(3-i)(2-5i)-(3+i)(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \dfrac{1-17i-1-17i}{29} = -\dfrac{34}{29}i$

نستنتج من 1) أن $\operatorname{Re}(z_1) = \dfrac{1}{29}$ و $\operatorname{Im}(z_1) = -\dfrac{17}{29}$ وبالتالي $z_1 = \dfrac{1}{29} - \dfrac{17}{29}i$

تمرين:

أكتب بدلالة $\overline{z}$ ، مرافق الأعداد المركبة Z التالية :

أ. $Z = 2+3iz$.		ب. $Z = (2+iz)(1+3z)$.		جـ. $Z = \dfrac{2+iz}{z+2}$.

حل:

أ. $\overline{Z} = \overline{2+3iz} = \overline{2} + \overline{3iz} = 2 + \overline{3i} \times \overline{z} = 2 - 3i\overline{z}$.

ب. $\overline{Z} = \left(\overline{2+iz}\right)\left(\overline{1+3z}\right) = \left(2-i\overline{z}\right)\left(1+3\overline{z}\right)$.

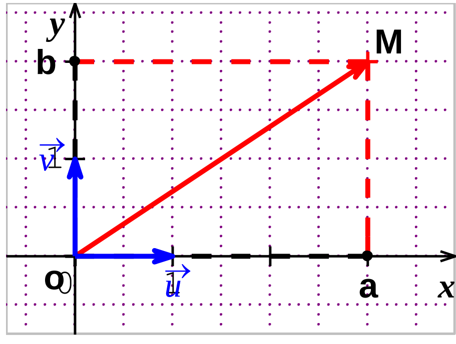
جـ. $\overline{Z} = \dfrac{\overline{2+iz}}{\overline{z+2}} = \dfrac{2-i\overline{z}}{\overline{z}+2}$.

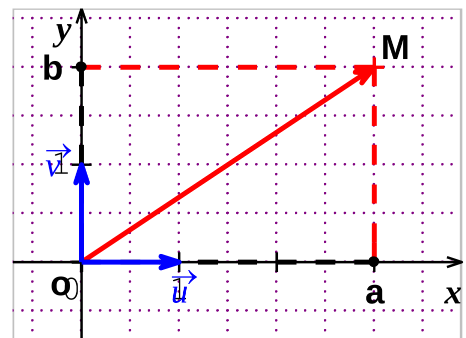
طويلة وعمدة عدد مركب

طويلة عدد مركب



التعريف:





z عدد مركب صورته النقطة M في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

المسافة OM تسمى طويلة العدد المركب z ونرمز إليها بالرمز $|z|$.

لدينا $|z| = OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ وإذا كان $z = a+bi$ فإن $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

مثال:

z_A ، z_B ، z_C و z_D هي على الترتيب، لواحق النقط $A(\sqrt{3};1)$ ، $B(-\sqrt{3};-1)$ ، $C(0;2)$ ، $D(\sqrt{3};3)$.

1) أحسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_C|$. ماذا يمكنك أن تستنتج ؟

2) ما هي طبيعة الرباعي $AOCD$ ؟

حل

1) $|z_A| = OA = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ ، $|z_B| = OB = \sqrt{3+1} = 2$ و $|z_C| = OC = \sqrt{0+4} = 2$.

نستنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 2 .

2) لدينا $CD = |z_D - z_C| = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (3-2)^2} = 2$ ؛ $AD = |z_D - z_A| = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 + (3-1)^2} = 2$ ؛ إذن

$AO = OC = CD = DA = 2$ وبالتالي الرباعي $AOCD$ هو معين.

ملاحظات:

إذا كان $z = a$ (حقيقي) فإن $|z| = |a|$ الطويلة هي القيمة لمطلقة

إذا كان $z = bi$ (تخيلي صرف) فإن $|z| = |b|$

خواص الطويلة:

$z\bar{z} = |z|^2$ $\quad |\bar{z}| = |z| = |-z|$ $\quad |zz'| = |z| \times |z'|$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ مع $z' \neq 0$ $\quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$

نتيجة:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا $|z^n| = |z|^n$.

تمرين:

يعطى العدد المركب α حيث : $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1) أحسب α^2 ثم α^4 .

2) أحسب $|\alpha^4|$ ثم استنتج $|\alpha|$.

3) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z حيث $|\alpha z| = 6$.

حل:

1) $\alpha^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 = 2 - \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}(1+i)$

$\alpha^4 = \left[-2\sqrt{2}(1+i)\right]^2 = 8 \times 2i = 16i$

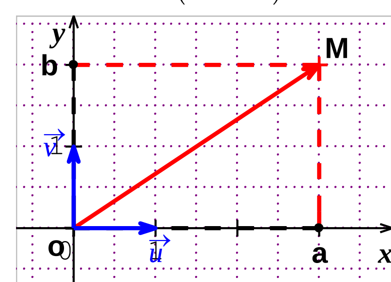
2) $|\alpha^4| = 16$ بما أن $|\alpha^4| = |\alpha|^4$ فإن $|\alpha|^4 = 2^4$ ومنه $|\alpha| = 2$.

3) $|\alpha z| = 6$ معناه $|\alpha| \times |z| = 6$ ومعناه $|z| = 3$ أي $OM = 3$ إذن مجموعة النقط M هي الدائرة ذات المركز O ونصف قطر 3 .

عمدة عدد مركب غير معدوم

التعريف:

z عدد مركب غير معدوم صورته النقطة M في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.



نسمي عمدة للعدد المركب z كل قيسا للزاوية $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ ونرمز لها بـ $Arg(z)$.

إذا كان θ أحد أقياس الزاوية $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ فإن $Arg(z)=\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

ملاحظات:

إذا كان z عدد مركبا معدوما فإن عمدته غير معينة.

A و B نقطتان من المستوي تختلفان عن المبدأ O؛ $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=Arg(z_B)-Arg(z_A)+2k\pi$.

$Arg(\bar{z})=-Arg(z)+2k\pi$

$Arg(-z)=Arg(z)+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين:

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1) نعتبر العدد المركب $z_A=\sqrt{3}+i$ صورته النقطة A. مثل النقطة A وأحسب طويلة العدد المركب z_A واستنتج عمدة له.

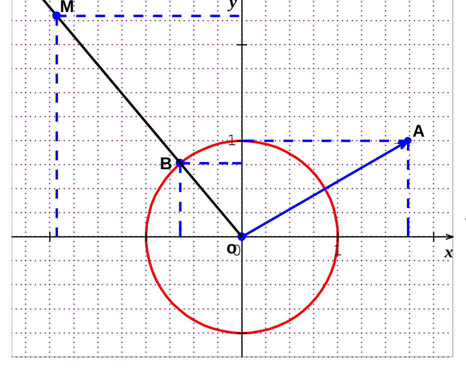
2) نعتبر في الدائرة المثلثية المنسوبة إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$، النقطة B ذات اللاحقة z_B حيث $(\vec{u};\overrightarrow{OB})=\theta+2k\pi$

. عين إحداثيي النقطة B بدلالة θ.

. لتكن $M(a;b)$ نقطة من نصف المستقيم $[OB)$ لاحقتها العدد المركب z. برّر أن $z=\sqrt{a^2+b^2}\times z_B$ و $Arg(z)=\theta$.

. استنتج كتابة للعدد المركب z بدلالة θ.

حل:



1) $|z_A|=\sqrt{3+1}=2$ لدينا $\cos(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}$

ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ إذن $Arg(z_A)=\frac{\pi}{6}$.

2). $B(\cos\theta;\sin\theta)$.

. لدينا $OB=1$ ومنه $\overrightarrow{OM}=OM.\overrightarrow{OB}=\sqrt{a^2+b^2}.\overrightarrow{OB}$ إذن $z=\sqrt{a^2+b^2}\times z_B$.

لدينا $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=(\vec{u};\overrightarrow{OB})=\theta+2k\pi$ ومنه $Arg(z)=\theta$.

. لدينا $z=\sqrt{a^2+b^2}\times z_B$ معناه $z=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$.

3] الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

تعريف:

كل عدد مركب غير معدوم z يكتب على الشكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $r=|z|$ و $Arg(z)=\theta$.

هذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب z.

نتائج:

$\bar{z}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$

$-z = r\left(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\right)$.

تطبيقات:

المطلوب كتابة الأعداد المركبة على شكلها المثلثي

تمرين:

$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

حل:

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$$

تمرين:

$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ؛ $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ؛ $z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ؛ $z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

حل:

$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$z_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}$$

$$z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}$$.

تمرين:

$z_1=3$ ؛ $z_2=-\sqrt{5}$ ؛ $z_3=i$ ؛ $z_4=-7i$.

حل:

$z_1=3=3(1+0i)=3(\cos 0+i\sin 0)$ ؛ $z_2=-\sqrt{5}=\sqrt{5}(-1+0i)=\sqrt{5}(\cos\pi+i\sin\pi)$

$z_3=i=(0+i)=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ ؛ $z_4=-7i=7(0-i)=7\left(\cos-\frac{\pi}{2}+i\sin-\frac{\pi}{2}\right)$.

نتيجة:

إذا كان z حقيقيا موجبا تماما فإن $|z|=z$ و $Arg(z)=0$ ؛ وإذا كان z حقيقيا سالبا تماما فإن $|z|=-z$ و $Arg(z)=\pi$.

إذا كان z تخيليا صرفا على الشكل $z=yi$ فإن $|z|=|y|$ وفي حالة $y>0$ يكون $Arg(z)=\frac{\pi}{2}$ وفي حالة $y<0$ يكون $Arg(z)=-\frac{\pi}{2}$.

تمرين:

في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z .

أ. $z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. ب. $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

جـ. $z=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$. د. $z=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$.

حل:

أ. $z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$ ؛ إذن $|z|=4$ و $Arg(z)=-\frac{\pi}{4}$.

ب. $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right)=3\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

إذن $|z|=3$ و $Arg(z)=\frac{5\pi}{3}$.

جـ. $z=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ؛ إذن $|z|=\sqrt{5}$

و $Arg(z)=\frac{\pi}{6}$.

د. $z=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}$ ؛ إذن $|z|=1$ و $Arg(z)=-\frac{\pi}{3}$.

خاصية:

r و r' عددان حقيقيان موجبان تماما؛ θ و θ' عددان حقيقيان.

$r(\cos\theta+i\sin\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ معناه $r=r'$ و $\theta=\theta'+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تمرين:

θ و θ' عددان حقيقيان. أحسب $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')$ و $\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}$.

حل

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+(\cos\theta\sin\theta'-\sin\theta\cos\theta')i$$

أي $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'+i\sin\theta')=\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$.

$$\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta'-i\sin\theta')}{(\cos\theta'+i\sin\theta')(\cos\theta'-i\sin\theta')}=\frac{(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta')+(\sin\theta\cos\theta'-\cos\theta\sin\theta')i}{(\cos^2\theta'+\sin^2\theta')}$$

أي $\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta'+i\sin\theta'}=\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta')$.

خواص العمدة:

z و z' عددان مركبان غير معدومين:

$$Arg(zz')=Arg(z)+Arg(z')$$

$$Arg\left(\frac{z}{z'}\right)=Arg(z)-Arg(z')$$

$Arg\left(\frac{1}{z}\right)=-Arg(z')$.

تمرين:

في كل حالة من الحالات التالية مثل مجموعة النقط ذات اللاحقة العدد المركب z الذي يحقق المساواة المقترحة: أ .

$Arg(iz)=\frac{3\pi}{2}$. ب . $Arg\left(\frac{z}{1+i}\right)=\frac{\pi}{4}$. جـ . $Arg(z)=Arg(\bar{z})$.

حل

أ . $Arg(iz)=\frac{3\pi}{2}$ معناه $Arg(z)+Arg(i)=\frac{3\pi}{2}$ أي $Arg(z)=\frac{3\pi}{2}-Arg(i)=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi$ إذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي نصف المستقيم من حامل محور الفواصل، فواصل نقطه سالبة تماما.

ب . $Arg\left(\frac{z}{1+i}\right)=\frac{\pi}{4}$ معناه $Arg(z)-Arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ أي $Arg(z)=\frac{\pi}{4}+Arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ إذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي نصف المستقيم من حامل محور التراتيب، تراتيب نقطه موجبة تماما.

جـ . $Arg(z)=Arg(\bar{z})$ معناه $Arg(z)=-Arg(z)+2k\pi$ أي $Arg(z)=k\pi$ إذن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z هي حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O .

تمرين:

$z_1=(2+2i)(\sqrt{3}-i)$ ؛ $z_2=\frac{4}{\sqrt{3}+i}$ ؛ $z_3=\frac{3i}{2+2i\sqrt{3}}$ ؛ $z_4=\frac{\sqrt{6}}{1+i}$.

الحل

$2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ؛ $\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos-\frac{\pi}{6}+i\sin-\frac{\pi}{6}\right)$

ومنه $Arg(z_1)=Arg(2+2i)+Arg(\sqrt{3}-i)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$ إذن $z_1=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

$$z_2=\frac{4}{\sqrt{3}+i}=\frac{4(\cos 0+i\sin 0)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\right)}=2\left(\cos-\frac{\pi}{6}+\sin-\frac{\pi}{6}\right) .$$

$$z_3=\frac{3i}{2+2i\sqrt{3}}=\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) .$$

$$z_4=\frac{\sqrt{6}}{1+i}=\frac{\sqrt{6}(\cos 0+i\sin 0)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{3}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right) .$$

مبرهنة

z عدد مركب غير معدوم .

أ . باستعمال البرهان بالتراجع ، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

ب . استنتج أنّه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n، $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

البرهان

أ . الخاصية الابتدائية هي $\arg(z^1)=1\arg(z)$ وهي صحيحة.

نفرض أن $\arg(z^k)=k\arg(z)$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم k ولنبرهن أن $\arg(z^{k+1})=(k+1)\arg(z)$.

لدينا: $\arg(z^{k+1})=\arg(zz^k)=\arg(z)+\arg(z^k)=\arg(z)+k\arg(z)=(k+1)\arg(z)$ ؛ إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

ب . إذا كان $n\in\mathbb{Z}_+^*$ وبالتالي n عدد طبيعي غير معدوم وحسب أ . يكون $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

إذا كان $n\in\mathbb{Z}_-^*$ نضع $n=-m$ ولدينا: $\arg(z^n)=\arg(z^{-m})=\arg\left(\frac{1}{z^m}\right)=-\arg(z^m)=-m\arg(z)=n\arg(z)$.

إذن من أجل كل عدد صحيح غير معدوم n، $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

نتيجة:

من أجل كل $n\in\mathbb{Z}^*$، $\arg(z^n)=n\arg(z)$

تمرين:

z، u و v أعداد مركبة حيث $z=(3+\sqrt{3})+i(-3+\sqrt{3})$ ، $u=3+i\sqrt{3}$ و $v=\frac{z}{u}$.

1) أكتب v على الشكل الجبري .

2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و z .

3) استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) أثبت أن العدد z^{2010} تخيلي صرف .

حل:

1) $$v=\frac{z}{u}=\frac{(3+\sqrt{3})+i(-3+\sqrt{3})}{3+i\sqrt{3}}=\frac{\left[(3+\sqrt{3})+i(-3+\sqrt{3})\right](3-i\sqrt{3})}{12}$$

$$v=\frac{9+3\sqrt{3}-9i+3\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i-3i-3\sqrt{3}+3}{12}=\frac{12-12i}{12}=1-i$$

2) $u=3+i\sqrt{3}$ ؛ $|u|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ؛ $\cos\theta=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$ ومنه $\arg(u)=\frac{\pi}{6}$.

$v=1-i$ ؛ $|v|=\sqrt{2}$ ؛ $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه $\arg(v)=-\frac{\pi}{4}$.

$v=\frac{z}{u}$ معناه $z=uv$ وبالتالي $|z|=|u|\times|v|=2\sqrt{6}$ و $\arg(z)=\arg(u)+\arg(v)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}$.

3) لدينا $z=(3+\sqrt{3})+i(-3+\sqrt{3})=2\sqrt{6}\left(\cos-\frac{\pi}{12}+i\sin-\frac{\pi}{12}\right)$ معناه $\cos-\frac{\pi}{12}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

و $\sin-\frac{\pi}{12}=\frac{-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ومعناه $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin-\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4) $\arg\left(z^{2010}\right)=2010\arg(z)=-\frac{2010\pi}{12}=-\frac{335\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{336\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-168\pi$ بما أن $\cos\frac{\pi}{2}=0$ فإن $\operatorname{Re}\left(z^{2010}\right)=0$ أي العدد z^{2010} تخيلي صرف .

4] ترميز أولير:

θ عدد حقيقي؛ يرمز للعدد $\cos\theta+i\sin\theta$ بالرمز $e^{i\theta}$ ونكتب $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

ملاحظات:

* $e^{-i\theta}=\cos-\theta+i\sin-\theta=\cos\theta-i\sin\theta$ ؛ $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.

* إذا كان z عددا مركبا غير معدوم، طويلته r و θ عمدة له فإن $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$.

$z=re^{i\theta}$ يسمى الشكل الأسّي للعدد المركب z .

نتائج:

دستور أولير $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ ؛ $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

دستور موافر: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ؛ $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$.

ملاحظات:

* $\cos^2\theta+\sin^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+2}{4}-\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}-2}{4}=1$

* $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+2}{4}+\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}-2}{4}=\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}=\cos 2\theta$

* $\cos\theta\sin\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)=\frac{e^{i2\theta}-e^{-i2\theta}}{4i}=\frac{\sin 2\theta}{2}$.

تمرين:

أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي: $z_1=2-2i$ ؛ $z_2=3\sqrt{3}-3i$ ؛ $z_3=\frac{5}{4}i$ ؛ $z_4=-1$.

حل:

$z_1=2-2i$ ؛ $|z_1|=2\sqrt{2}$ و $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن $\theta=-\frac{\pi}{4}$ ومنه $z_1=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$z_2=3\sqrt{3}-3i$ ؛ $|z_2|=6$ و $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ إذن $\theta=-\frac{\pi}{6}$ ومنه $z_2=6e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

$z_3=\frac{5}{4}i$ ؛ $|z_3|=\frac{5}{4}$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$ ومنه $z_3=\frac{5}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}$. $z_4=-1$ ؛ $|z_4|=1$ و $\theta=\pi$ ومنه $z_4=e^{i\pi}$.

خواص:

$e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$

$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$

$\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$

$.-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$

تمرين:

نضع : $a=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ و $b=1-i$.

1) أكتب على الشكل الأسّي كلا من الأعداد المركبة a ، b و $\frac{a}{b}$.

2) أكتب العدد $\frac{a}{b}$ على الشكل الجبري. استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) حل في المجال $]-\pi;\pi]$ المعادلة $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$.

حل :

1) $a=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{6}+i\sin-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

$b=1-i=\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2) $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}=\frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$. $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

3) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$ معناه $\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}\cos x+\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}\sin x=\frac{1}{2}$ ومعناه

$\cos\frac{\pi}{12}\cos x+\sin\frac{\pi}{12}\sin x=\frac{1}{2}$ يكافئ $\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$ ويكافئ $x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

مع $k\in\mathbb{Z}$ أي $x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ؛ وفي المجال $]-\pi;\pi]$ يكون $x=\frac{5\pi}{12}$ و $x=-\frac{\pi}{4}$.

خواص هندسية:

الخاصية 1:

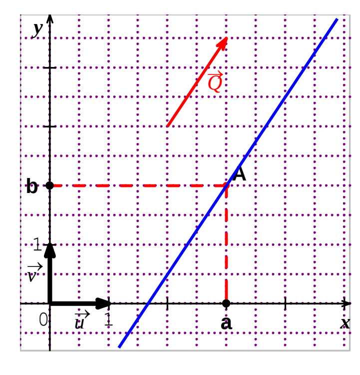
A ، B ، C و D نقط من المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ حيث $A\neq B$ و $D\neq C$.

$\frac{CD}{AB}=\left|\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right|$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\left(\vec{u};\overrightarrow{CD}\right)-\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)=\arg\left(z_D-z_C\right)-\arg\left(z_B-z_A\right)=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$.

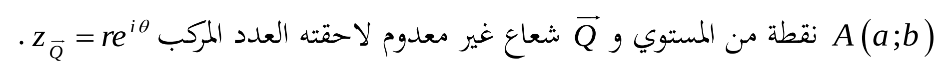
نتائج:

* $\overrightarrow{AB}$ يعامد $\overrightarrow{CD}$ معناه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومعناه $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ تخيلي صرف.

* $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا معناه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=k\pi$ ومعناه $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ حقيقي.



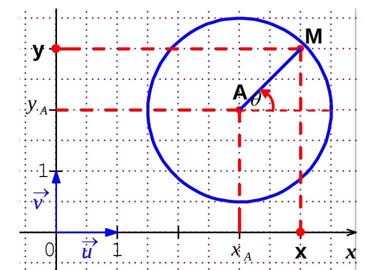
خاصية 2:



$A(a;b)$ نقطة من المستوى و $\vec{Q}$ شعاع غير معدوم لاحقته العدد المركب $z_{\vec{Q}}=re^{i\theta}$.

Δ المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{Q}$ شعاع توجيهي له. M نقطة من المستوى لاحقتها العدد المركب z.

$M\in\Delta$ معناه $\overrightarrow{AM}=\lambda.\vec{Q}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$ أي $z-z_A=\lambda re^{i\theta}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$.



خاصية 3:

نعتبر الدائرة ζ ذات المركز $A(a;b)$ ونصف القطر r.

لتكن M نقطة ذات اللاحقة $z=x+iy$.

$M\in\zeta$ معناه $|z-z_A|=r$ ومعناه $z-z_A=re^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

تمرين:

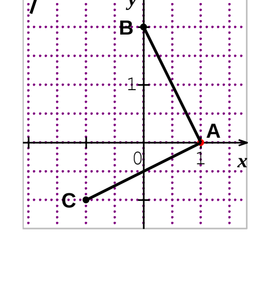
A ؛ B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_1=1$ ؛ $z_2=2i$ و $z_3=-1-i$.

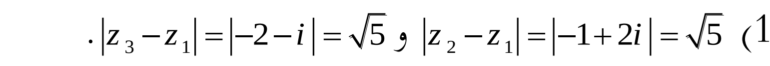
1) أحسب $|z_2-z_1|$ و $|z_3-z_1|$.

2) أحسب $\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$.

3) استنتج طبيعة المثلث ABC.

حل:





1) $|z_2-z_1|=|-1+2i|=\sqrt{5}$ و $|z_3-z_1|=|-2-i|=\sqrt{5}$.

2) $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{-1+2i}{-2-i}=\frac{(-1+2i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)}=\frac{-5i}{5}=-i$ ومنه $\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)=-\frac{\pi}{2}$

3) لدينا $AB=AC=\sqrt{5}$ ؛ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A .



المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

المعادلات من الدرجة الثانية:

نعتبر المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $az^2+bz+c=0$ مع a ، b و c أعداد مركبة و a غير معدوم.

$\Delta=b^2-4ac$ مميز المعادلة وليكن δ أحد الجذرين التربيعيين للعدد المركب Δ .

المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين مركبين هما : $z'=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ و $z''=\dfrac{-b+\delta}{2a}$

ملاحظة:

إذا كان $b=2b'$ فإن $\Delta=b^2-4ac=4\left(b'^2-ac\right)$ ويكون $\Delta'=b'^2-ac$ المميز المختصر للمعادلة

والحلان هما: $z'=\dfrac{-b'-\delta'}{a}$ و $z''=\dfrac{-b'+\delta'}{a}$ مع δ' أحد الجذرين التربيعيين للعدد المركب Δ' .

تمرين:

حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات ذات المجهول z التالية :

أ. $2z^2-6z+5=0$. ب. $z^2-2z+3=0$. ج. $z^2=z+1$. د. $z^2+3=0$.

حل:

أ. $2z^2-6z+5=0$ ؛ $\Delta'=9-10=-1=i^2$ ومنه $z'=\dfrac{3-i}{2}$ و $z''=\dfrac{3+i}{2}$.

ب. $z^2-2z+3=0$ ؛ $\Delta'=1-3=-2=\left(i\sqrt{2}\right)^2$ ومنه $z'=1-i\sqrt{2}$ و $z''=1+i\sqrt{2}$.

ج. $z^2=z+1$ معناه $z^2-z-1=0$ ؛ $\Delta=1+4=5$ ومنه $z'=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ و $z''=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

د. $z^2+3=0$ معناه $z^2=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ ومعناه $z=i\sqrt{3}$ أو $z=-i\sqrt{3}$.

ملاحظات:

إذا كان $\Delta\in\mathbb{R}_+$ فإن الحلين يكونا حقيقيين وإذا كان $\Delta\in\mathbb{R}_-^*$ فإن الحلين يكونا مترافقين.

الجدران التربيعيان لعدد مركب:

مثال 1:

عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=1-i\sqrt{3}$.

الطريقة الأولى:

الشكل الأسي:

$z=1-\sqrt{3}i=2\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. ليكن $\alpha=re^{i\theta}$ حيث $\alpha^2=z$.

$\alpha^2=z$ معناه $r^2e^{2i\theta}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومعناه $r^2=2$ و $2\theta=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ أي $r=\sqrt{2}$ و $\theta=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$.

إذن $\alpha'=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ و $\alpha''=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

الطريقة الثانية:

الشكل الجبري:

ليكن $\alpha=x+iy$ حيث $\alpha^2=z$.

$\alpha^2=z$ معناه $x^2-y^2+2xyi=1-i\sqrt{3}$ ومعناه $x^2-y^2=1$ و $2xy=-\sqrt{3}$.

لدينا $|\alpha^2|=|z|$ معناه $|\alpha|^2=2$ أي $x^2+y^2=2$.

لنحل الجملة $\begin{cases}x^2+y^2=2\\x^2-y^2=1\\xy<0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}2x^2=3\\2y^2=1\\xy<0\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}x^2=\frac{3}{2}\\y^2=\frac{1}{2}\\xy<0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ أو } x=-\frac{\sqrt{6}}{2}\\y=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أو } y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\xy<0\end{cases}$ ومعناه

$(x;y)=\left(\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أو $(x;y)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ أي $\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ملاحظة:

كل عدد مركب يقبل جذرين تربيعيين متعاكسين.

مثال 2:

عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=-8+6i$.

ليكن $\alpha=x+iy$ حيث $\alpha^2=z$.

$\alpha^2=z$ معناه $x^2-y^2+2xyi=-8+6i$ ومعناه $x^2-y^2=-8$ و $2xy=6$.

لدينا $|\alpha^2|=|z|$ معناه $|\alpha|^2=2$ أي $x^2+y^2=10$.

لنحل الجملة $\begin{cases}x^2+y^2=10\\x^2-y^2=-8\\xy>0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}2x^2=2\\2y^2=18\\xy>0\end{cases}$ ومعناه $\begin{cases}x^2=1\\y^2=9\\xy>0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=1 \text{ أو } x=-1\\y=3 \text{ أو } y=-3\\xy>0\end{cases}$ ومعناه $(x;y)=(1;3)$ أو

$(x;y)=(-1;-3)$ أي $\alpha=-1-3i$ أو $\alpha=1+3i$.

تمرين:

1) جد في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد المركّبة $L=2-2i\sqrt{3}$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2+4iz+i\sqrt{3}-3=0$.

حل:

1) ليكن $l=x+iy$ حيث $l^2=L$.

$l^2=L$ معناه $x^2-y^2+2ixy=2-2i\sqrt{3}$ ومعناه $x^2-y^2=2$ و $xy=-\sqrt{3}$.

لدينا $|l^2|=|L|$ معناه $|l|^2=|L|$ ومعناه $x^2+y^2=4$

لنحل الجملة $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2-y^2=2 \\ xy<0 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 2x^2=6 \\ 2y^2=2 \\ xy<0 \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} x^2=3 \\ y^2=1 \\ xy<0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=\sqrt{3} \text{ أو } x=-\sqrt{3} \\ y=1 \text{ أو } y=-1 \\ xy<0 \end{cases}$ ومعناه $(x;y)=(\sqrt{3};-1)$

أو $(x;y)=(-\sqrt{3};1)$ أي $l=\sqrt{3}-i$ أو $l=-\sqrt{3}+i$.

2) $2z^2+4iz+i\sqrt{3}-3=0$ ؛ $\Delta'=(2i)^2-2(i\sqrt{3}-3)=2-2i\sqrt{3}=(\sqrt{3}-i)^2$ ومنه

$z'=\dfrac{-2i+\sqrt{3}-i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i$ و $z''=\dfrac{-2i-\sqrt{3}+i}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$. $Es=\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right\}$

التحويلات النقطية

الانسحاب

ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

التعريف:

$\vec{P}$ شعاع من المستوي. الانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\overrightarrow{MM'}=\vec{P}$.

خواص:

* إذا كان $\vec{P}$ معدوما فإن كل نقط المستوي صامدة بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$.
* إذا كان $\vec{P}$ غير معدوم فإنه لا توجد نقطة صامدة بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$.
* صورة ثنائية نقطية $(A;B)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$ هي الثنائية النقطية $(A';B')$ حيث $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$.
* الانسحاب هو تقايس (يحافظ على المسافات)
* الانسحاب يحافظ على الاستقامية ؛ أقياس الزوايا ؛ المرجح والتوازي.

التعريف المركب:

z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب. $\vec{P}$ شعاع من المستوي لاحقته العدد المركب b.

التعريف المركب للانسحاب الذي شعاعه $\vec{P}$ هو $z'=z+b$.

مثال:

العبارة المركبة للانسحاب الذي شعاعه $\vec{Q}(-1;2)$ هي: $z'=z-1+2i$.

مثال:

العبارة $z'=z-3i$ هي التعريف المركب للانسحاب ذي الشعاع $\vec{P}(0;-3)$ والذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' .

التحاكي:

ينسب المستوي المركب إلى معلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

التعريف:

Ω نقطة من المستوي. λ عدد حقيقي غير معدوم.

التحاكي الذي مركزه Ω نسبته λ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\overrightarrow{\Omega M'}=\lambda.\overrightarrow{\Omega M}$.

خواص:

* للتحاكي نقطة صامدة واحدة وهي المركز Ω.

* صورة ثنائية نقطية $(A;B)$ بالتحاكي الذي مركزه Ω نسبته λ هي الثنائية النقطية $(A';B')$ حيث $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

* التحاكي يحافظ على الاستقامية ؛ أقياس الزوايا ؛ المرجح والتوازي

التعريف المركب:

a عدد حقيقي غير معدوم ويختلف عن 1. Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها العدد المركب z_Ω.

z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب.

التعريف المركب للتحاكي الذي مركزه Ω ونسبته a هو $z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega)$

ملاحظة:

$z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega)$ معناه $z'=az+(1-a)z_\Omega$

نضع $b=(1-a)z_\Omega$ ومنه $z'=az+b$ إذن التعريف المركب للتحاكي هو $z'=az+b$ حيث $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ و b عدد مركب.

نسبة التحاكي هي العدد الحقيقي a ولاحقة مركزه $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$.

مثال 1:

أكتب العبارة المركبة للتحاكي ذي المركز O مبدأ المعلم ونسبته 3. $z'-z_O=3(z-z_O)$ أي $z'=3z$.

مثال 2:

Ω نقطة لاحقتها العدد المركب $\omega=1-i$. عين العبارة المركبة للتحاكي ذي النسبة $-\dfrac{1}{2}$ والمركز Ω.

$z'-z_\Omega=-\dfrac{1}{2}(z-z_\Omega)$ أي $z'=-\dfrac{1}{2}z+\dfrac{3}{2}z_\Omega$ أي $z'=-\dfrac{1}{2}z+\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}i$

مثال 3:

ما هي طبيعة التحويل النقطي المعرف بِ: $z'=-\dfrac{3}{2}z-2+3i$.

هو تحاك نسبته $-\dfrac{3}{2}$ ولاحقة مركزه العدد المركب $\dfrac{-2+3i}{1+\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{5}i$.

تطبيق:

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $a=3+i$ ، $b=-2+3i$ و $8-i$.

أ . عيّن نسبة التحاكي h ذي المركز C والذي يحوّل A إلى B .

ب . نقول عن مستقيم الذي ينطبق على صورته بتحويل ، أنه صامدا إجماليا .

برهن أن المستقيم الذي يشمل النقطة C ومعامل توجيهه 2 هو صامد إجمالي ، ثم أكتب معادلة له .

حل

أ. لدينا: $z_B = \alpha z_A + \beta$ و $z_C = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ ومعناه $-2+3i = (3+i)\alpha + \beta$ و $\beta = (1-\alpha)(8-i)$

معناه $-2+3i = (3+i)\alpha + (8-i) - \alpha(8-i)$ و $\beta = (1-\alpha)(8-i)$ ومعناه $(-5+2i)\alpha = -10+4i$

و $\beta = (1-\alpha)(8-i)$ أي $\alpha = 2$ و $\beta = -8+i$ ؛ إذن التعريف المركب هو $z' = 2z - 8 + i$

إذن نسبة التحاكي هي $\alpha = 2$.

نسمي Δ المستقيم الذي يشمل النقطة C ومعامل توجيهه 2 ؛ من أجل كل نقطة M من Δ لدينا صورتها بالتاحاكي ذي المركز C والنسبة 2 هي M' حيث $\overrightarrow{CM'} = 2.\overrightarrow{CM}$ وبالتالي $M' \in \Delta$ أي المستقيم Δ صامد إجمالي.

تطبيق :

t هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين (x, y) ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x', y')

حيث : $x' = 2x - \dfrac{3}{2}$ و $y' = 2y + \dfrac{1}{2}$.

أ. ما هي طبيعة التحويل t ؟

ب. أكتب العبارة المركّبة للتحويل t .

حل التطبيق:

1) نعتبر النقطة $\Omega(x ; y)$ حيث $(1-2)x = -\dfrac{3}{2}$ و $(1-2)y = \dfrac{1}{2}$ إذن $x = \dfrac{3}{2}$ و $y = -\dfrac{1}{2}$.

لدينا $x' - \dfrac{3}{2} = 2x - \dfrac{6}{2}$ و $y' + \dfrac{1}{2} = 2y + 1$ معناه $x' - \dfrac{3}{2} = 2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ و $y' + \dfrac{1}{2} = 2\left(y + \dfrac{1}{2}\right)$ أي $\overrightarrow{\Omega M'} = 2.\overrightarrow{\Omega M}$

إذن t هو التحاكي ذو المركز $\Omega\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ والنسبة 2 .

2) التعريف المركب للتحاكي هو $z' = 2z + \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

الدوران:

ينسب المستوي المركب إلى معلم $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

التعريف:

Ω نقطة من المستوي؛ θ عدد حقيقي.

الدوران الذي مركزه Ω وزاويتها θ هو التحويل النقطي في المستوي، يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث $\Omega M' = \Omega M$ و $\left(\overrightarrow{\Omega M} ; \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

خواص:

* إذا كان $\theta = 0$ فإن كل نقط المستوي صامدة بالدوران ذي المركز Ω والزاوية 0 وفي هذه الحالة هو التحويل المطابق.
* إذا كان $\theta \neq 0$ فإن للدوران نقطة صامدة وحيدة وهي مركزه.
* صورة كل ثنائية نقطية $(A ; B)$ بالدوران هي الثنائية $(A' ; B')$ حيث $A'B' = AB$.
* الدوران هو تقايس (يحافظ على المسافات)

* الدوران يحافظ على الاستقامية ؛ أقياس الزوايا والمرجح.

التعريف المركب:

θ عدد حقيقي. Ω نقطة ثابتة من المستوي لاحقتها العدد المركب z_Ω.

z و z' عددان مركبان صورتهما النقطتين M و M' على الترتيب بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ

لدينا: $|z'-z_\Omega|=|z-z_\Omega|$ و $\arg(z'-z_\Omega)-\arg(z-z_\Omega)=\theta$ وهذا يعني : $\left|\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right|=1$ و $\arg\left(\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right)=\theta$

ويكافئ $\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}=e^{i\theta}$

نضع $a=e^{i\theta}$ إذن $z'-z_\Omega=a(z-z_\Omega)$ وهذا يعني $z'=az+(1-a)z_\Omega$.

خاصية:

التعريف المركب للدوران هو $z'=az+b$ حيث $a\in\mathbb{C}^*-\{1\}$ و $|a|=1$ ، زاوية الدوران هي $\arg(a)$ ومركزه صورة العدد المركب $\dfrac{b}{1-a}$.

مثال:

ما هي طبيعة التحويل t المعرف بِـ : $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)z+2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ مطلوب إعطاء عناصره المميزة.

$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ و $|a|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|-1+i|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}=1$ إذن t هو دوران.

$a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{3\pi}{4}}$ إذن زاوية الدوران t هي $\dfrac{3\pi}{4}$. $\dfrac{2+\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}=2$ وبالتالي مركز الدوران t هو $\Omega(2;0)$.

تطبيق

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما $a=\dfrac{1}{2}(1+i)$ و $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

عين زاوية الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O ويحوّل A إلى B.

حل:

$\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\dfrac{\sqrt{2}i}{1+i}=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن زاوية الدوران هي $\dfrac{\pi}{4}$.

تطبيق:

t هو التحويل في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات الإحداثيتين (x,y) ، النقطة M' ذات الإحداثيتين (x',y')

حيث : $x'=1-y$ و $y'=x-2$. نضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$.

أ. أكتب z' بدلالة z .

ب. ما هي طبيعة التحول t مبيّنا عناصره المميّزة ؟

حل:

أ. $z'=x'+iy'=1-y+(x-2)i=xi-y+1-2i=i(x+iy)+1-2i$ أي $z'=iz+1-2i$

ب . طبيعة التحول t وعناصره المميّزة: $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ إذن t دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه صورة العدد المركب

$\frac{1-2i}{1-i}=\frac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$.

ملخص:

T **معرف بـ:** $z'=az+b$

	التحويل T هو:	العناصر المميزة	يحافظ على	صورة دائرة مركزها ω ونق r
$a=1$	انسحاب	شعاعه $\vec{w}$ لاحقته b	المسافات؛ أقياس الزوايا؛ الاستقامية؛ المرجح والتوازي	هي دائرة تقايسها مركزها ω' صورة ω بالانسحاب.
$a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$	تحاك	نسبته a ولاحقة مركزه $\frac{b}{1-a}$	أقياس الزوايا؛ الاستقامية؛ المرجح والتوازي.	هي دائرة مركزها ω' صورة ω بالتحاكي ونصف قطرها $\|a\|\times r$.
$a\in\mathbb{C}^*-\{1\}$ و $\|a\|=1$	دوران	زاويته $\arg(a)$ ولاحقة مركزه $\frac{b}{1-a}$	المسافات ؛ أقياس الزوايا؛ الاستقامية والمرجح.	هي دائرة تقايسها مركزها ω' صورة ω بالدوران.

تمرين:

نعتبر العددين المركبين $a=3+i\sqrt{3}$ ، $b=2+\sqrt{3}+3i$.

A ، B و C نقط من المستوي لواحقها a ، $\bar{a}$ و b على الترتيب .

1) بيّن أن المثلث ABO متساوي الساقين ، ثمّ عيّن z_G لاحقة مركز ثقله G .

2) ليكن α و β عددين مركبين وليكن T التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=\alpha z+\beta$.

أ . عيّن α و β حيث يكون $T(O)=G$ و $T(A)=C$.

ب . بيّن أنّ التحويل T هو دوران يطلب تعيّين مركزه وزاويته .

جـ . استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T.

حل

1) لدينا $\frac{OA}{OB}=\frac{|a|}{|\bar{a}|}=1$ معناه $OA=OB$ أي المثلث ABO متساوي الساقين. $z_G=\frac{0+a+\bar{a}}{3}=\frac{2}{3}\mathrm{Re}(a)=2$.

2) ليكن α و β عددين مركبين وليكن T التحويل النقطي في المستوي الذي يحوّل $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=\alpha z+\beta$.

أ . عيّن α و β حيث يكون $T(O)=G$ و $T(A)=C$.

$T(O)=G$ معناه $z_G=\alpha z_O+\beta$ أي $\beta=2$ و $T(A)=C$ معناه $z_C=\alpha z_A+\beta$

أي $2+\sqrt{3}+3i=\alpha\left(3+i\sqrt{3}\right)+2$

ومعناه $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+3i}{3+i\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+3i\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\dfrac{6\sqrt{3}+6i}{12}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ وبالتالي $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ و $\beta=2$.

ب . بيّن أنّ التحويل T هو دوران يطلب تعيّين مركزه وزاويته .

لتعريف المركب للتحويل T هو $z'=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}z+2$. لدينا $|\alpha|=\left|\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right|=1$ إذن T هو دوران،

ولدينا $\arg(\alpha)=\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ وهي زاوة الدوران T.

$\dfrac{\beta}{1-\alpha}=\dfrac{2}{1-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}-i}=\dfrac{8-4\sqrt{3}+4i}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}=\dfrac{8-4\sqrt{3}+4i}{8-4\sqrt{3}}=1+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}i=2+\left(2+\sqrt{3}\right)i$ إذن مركز الدوران T هي النقطة $D\left(2;2+\sqrt{3}\right)$.

جـ . استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T.

لدينا صورة مستقيم بالدوران هي مستقيم بما أن $T(O)=G$ و $T(A)=C$ فإن صورة المستقيم (OA) بالدوران T هي المستقيم (CG) .

تمرين:

المستوي منسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، لتكن النقطتان A و B صورتي العددين المركبين $a=4+2i$ و $b=3-i$ على الترتيب.

أ . بين أن المثلث OAB قائم ومتقايس الساقين.

ب . عين مركز وزاوية الدوران الذي يحول النقطة A إلى النقطة B، والنقطة B إلى النقطة O .

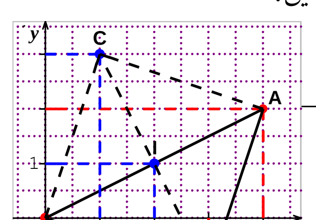
جـ . لتكن النقطة C صورة النقطة O بهذا الدوران. ما هي طبيعة الرباعي $ABOC$؟

حل

أ . تبيان أن المثلث OAB قائم ومتقايس الساقين.

لدينا لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BA}$ هي العدد المركب $a-b=1+3i$ ؛ $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{1+3i}{3-i}=\dfrac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{10}{10}i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

وبالتالي: $\left|\dfrac{a-b}{a}\right|=\dfrac{BA}{OB}=1$ و $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ أي المثلث OAB قائم في B ومتقايس الساقين.



ب . تعيين مركز وزاوية الدوران الذي يحول النقطة A إلى النقطة B، والنقطة B إلى النقطة O.

نقطة تقاطع محاور المثلث OAB هي I منتصف الوتر $[OA]$ ومنه $IA=IB=IO$

و $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ وبالتالي مركز الدوران هو النقطة I وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

جـ . لتكن النقطة C صورة النقطة O بهذا الدوران. تعيين طبيعة الرباعي $ABOC$:

لدينا $IO=IC$ و $\left(\overrightarrow{IO};\overrightarrow{IC}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ومنه القطعتان $[OA]$ و $[BC]$ متناصفتان

ومتعامدتان ومتقاستان إذن الرباعي $ABOC$ هو مربع.

تمرين:

النقطتان A و B صورتا العددين المركّبين $z_1=3-2i$ و $z_2=-1+6i$ على الترتيب ، في مستو مزوّد بالمعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

ω نقطة من حامل محور الفواصل و r الدوران الذي مركزه ω و يحوّل A إلى B .

. عيّن مركز و زاوية الدوران r.

حل

بما أن ω نقطة من حامل محور الفواصل فإن لاحقتها عدد حقيقي x ولدينا $\omega A=\omega B$ معناه $|z_1-x|=|z_2-x|$ أي

$|3-x-2i|=|-1-x+6i|$ ويكافئ $(3-x)^2+4=(-1-x)^2+36$ ومعناه $9+x^2-6x+4=1+x^2+2x+36$

معناه $-8x=24$ أي $x=-3$ وبالتالي $\omega(3;0)$.

لدينا $\frac{z_2-z_\omega}{z_1-z_\omega}=\frac{2+6i}{6-2i}=\frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=i$ ومنه زاوية الدوران r هي $\frac{\pi}{2}$.

تمرين:

النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب $2i$ ، 6 ، $1+i$ و $5-i$.

α و β عددان مركّبان ، t تحويل نقطي في المستوي يحول $M(z)$ إلى $M'(z')$ حيث $z'=3\alpha z+\beta$.

أ . عيّن α و β علما أن $t(A)=B$ و $t(C)=D$.

ب . ما هي طبيعة التحويل t مع تعيّين عناصره المميّزة ؟

حل

أ . تعيين α و β علما أن $t(A)=B$ و $t(C)=D$.

$t(A)=B$ معناه $z_B=3\alpha z_A+\beta$ و $t(C)=D$ معناه $z_D=3\alpha z_C+\beta$

إذن $z_D-z_B=3\alpha\left(z_C-z_A\right)$ أي $\alpha=\frac{z_D-z_B}{3\left(z_C-z_A\right)}=\frac{5-i-6}{3(1+i-2i)}=\frac{(-1-i)(1+i)}{3(1-i)(1+i)}=\frac{-2i}{3\times 2}=-\frac{1}{3}i$

$z_B=3\alpha z_A+\beta$ معناه $\beta=z_B-3\alpha z_A=6-3\left(-\frac{1}{3}i\right)(2i)=4$ ؛ وبالتالي $\alpha=-\frac{1}{3}i$ و $\beta=4$.

ب . طبيعة التحويل t مع تعيّين عناصره المميّزة :

لدينا t معرف بـ : $z'=-iz+4$ لدينا $|-i|=1$ ومنه t دوران زاويته $\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$ مركزه هو صورة العدد المركب $\frac{4}{1-i}=2+2i$.

تمرين:

$A(2;1)$ و $B(3;0)$ نقطتان من المستوي .

h التحاكي ذو المركز A والنسبة $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ؛ r الدوران ذو المركز B والزاوية $-\frac{\pi}{4}$ ؛ t الانسحاب ذو الشعاع $\overrightarrow{BO}$.

أ . اكتب العبارة المركبة لكل من التحويلات الثلاث .

ب . أكتب العبارة المركّبة للتحويل $(t\circ r\circ h)$.

ج . عيّن النقطة C حيث $(t\circ r\circ h)(C)=O$.

حل

أ . العبارة المركبة للتحاكي h: $z'=az+b$ مع $a=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ و $z_A=\frac{b}{1-a}$ أي $b=2+i+\frac{\sqrt{2}}{4}(2+i)=2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)i$. إذن $z'=-\frac{\sqrt{2}}{4}z+2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)i$

العبارة المركبة للدوران r: $z'=az+b$ مع $a=\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ و $z_B=\frac{b}{1-a}$ أي $b=z_B(1-a)$ معناه $b=3-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ إذن $z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z+3-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

العبارة المركبة للانسحاب t: لدينا $\overrightarrow{BO}(-3;0)$ إذن $z'=z-3$

ب . أكتب العبارة المركّبة للتحويل $(t\circ r\circ h)$.

نضع $h(z)=z_1$ و $r(z_1)=z_2$ و $t(z_2)=z'$.

$h(z)=z_1$ معناه $z_1=-\frac{\sqrt{2}}{4}z+2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)i$ ؛

$r(z_1)=z_2$ معناه $z_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z_1+3-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ ؛ $t(z_2)=z'$ معناه $z'=z_2-3$.

$(t\circ r\circ h)(z)=(t\circ r)(h(z))=(t\circ r)(z_1)=t(r(z_1))=t(z_2)=z'$.

$z'=z_2-3$ إذن $z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z_1+3-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i-3$ أي $z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z_1-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

ومنه $z'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}z+2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)i\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ أي

ومعناه $z'=\frac{1}{4}(1-i)z+\sqrt{2}-\sqrt{2}i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\right)i+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$

$z'=\frac{1}{4}(1-i)z+\frac{3}{4}+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)i$ وهي التعريف المركب للتحويل $(t\circ r\circ h)$

ج. عيّن النقطة C حيث $(t\circ r\circ h)(C)=O$.

$(t\circ r\circ h)(C)=O$ معناه $\frac{1}{4}(1-i)z_C+\frac{3}{4}+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)i=0$ أي $(1-i)z_C=-3-\left(4\sqrt{2}-1\right)i$ ومعناه

$$z_C=\frac{-3-\left(4\sqrt{2}-1\right)i}{(1-i)}=\frac{\left[-3-\left(4\sqrt{2}-1\right)i\right](1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-3-3i-\left(4\sqrt{2}-1\right)i+4\sqrt{2}-1}{2}=-2+2\sqrt{2}-\left(2\sqrt{2}+1\right)i$$

إذن $C\left(-2+2\sqrt{2};-2\sqrt{2}-1\right)$.

تمرين:

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي المركب ، لواحقها على الترتيب:

$z_A=2+2i$ ، $z_B=5+5i$ و $z_C=-2-2i$.

أ. أثبت أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ هو عدد حقيقي .

ب. استنتج طبيعة التحويل T الذي يحوّل B إلى C و A نقطته الصامدة الوحيدة .

جـ. أكتب العبارة المركّبة للتحويل T.

د. Γ المنحني ذي المعادلة $y=3x-\frac{1}{x}$.

أكتب معادلة لصورة المنحني Γ بالتحويل T .

حل

أ. $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-2-2i-2-2i}{5+5i-2-2i}=\frac{-4-4i}{3+3i}=-\frac{4}{3}$ وهو عدد حقيقي .

ب. لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-\frac{4}{3}$ معناه $z_C-z_A=-\frac{4}{3}(z_B-z_A)$ ومعناه $\overrightarrow{AC}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ إذن التحويل T الذي يحوّل B إلى C

و A نقطته الصامدة الوحيدة هو التحاكي ذي المركز A والنسبة $-\frac{4}{3}$.

جـ. العبارة المركّبة للتحويل T: $z'=-\frac{4}{3}z+\left(1+\frac{4}{3}\right)z_A=-\frac{4}{3}z+\frac{7}{3}(2+2i)$ أي

د. Γ المنحني ذي المعادلة $y=3x-\frac{1}{x}$.

$z'=-\frac{4}{3}z+\frac{14}{3}+\frac{14}{3}i$ معناه $3z'-14-14i=-4z$ أي $z=-\frac{1}{4}(3z'-14-14i)$

وبالتالي $x=-\frac{1}{4}(3x'-14)$ و $y=-\frac{1}{4}(3y'-14)$ ومنه $-\frac{1}{4}(3y'-14)=-\frac{3}{4}(3x'-14)+\frac{4}{3x'-14}$

$(3y'-14)=3(3x'-14)-\frac{16}{3x'-14}$ ؛ $y'=(3x'-14)-\frac{16}{3(3x'-14)}+\frac{14}{3}$ ؛ $y'=3x'-\frac{16}{3(3x'-14)}-\frac{28}{3}$.

التمارين مع الحلول

التمرين الاول　　　باك تجريبي بوقادير 2014 م1

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $z^2-6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z+9=0$

2. المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$,

A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ و $z_B=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ على الترتيب و r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و الذي يحول كل نقطة $M\left(z\right)$ من المستوي إلى النقطة $M'\left(z'\right)$.

أ)أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ثم بين أن النقطتان A و B تنتميان الى نفس الدائرة $\left(\Gamma\right)$ ذات المركز O و نصف القطر 3

ب) بين أن : $z'=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

3. لتكن A' و B' صورتي A و B على الترتيب بالدوران r .

أ - أكتب على الشكل الأسي. $z_{A'}$ و $z_{B'}$ لاحقتي النقطتين A' ، B' على الترتيب .

ب- أحسب $\arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right)$ ، ثم برهن أن B و A' متناظرتين بالنسبة الى النقطة O و أستنتج طبيعة المثلث ABA'

حل التمرين

1) لدينا المعادلة $z^2-6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)z+9=0$ تكافئ $z^2-3\sqrt{3}\,z+9=0$

$\Delta=-9=9i^2$ وعليه الحلين هما $z'=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ ، $z''=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

2) أ- لدينا : $z_A=3e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $z_B=3e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ولدينا $OA=OB=3$ ومنه A و B تنتميان لنفس الدائرة $\left(\Gamma\right)$ مركزها O ونصف قطرها 3 .

ب) لدينا $z'-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(z-z_O\right)$ ومنه $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ أي $z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

3) أ- لدينا : $z_{A'}=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 3e^{i\frac{\pi}{6}}=3e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $z_{B'}=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 3e^{-i\frac{\pi}{6}}=3e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب) لدينا : $\frac{z_{A'}}{z_B}=\frac{3e^{i\frac{5\pi}{6}}}{3e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\pi}$ ومنه $\arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right)=\pi+2\pi k$ أي $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}\right)=\pi+2\pi k$ ومن جهة

أخرى: $OA'=OB=3$ ومنه النقطتان B و A' متناظرتان بالنسبة إلى النقطة O

$[A'B]$ قطر للدائرة (Γ) و بما أن A تنتمي الى (Γ) فإن المثلث ABA' قائم في A .

التمرين الثاني — باك تجريبي بوقادير 2014 م2

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

2.المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$,

A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A=2\sqrt{3}-2i$ و $z_B=2\sqrt{3}+2i$ على الترتيب .

أ) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب) علم النقطتان A و B.

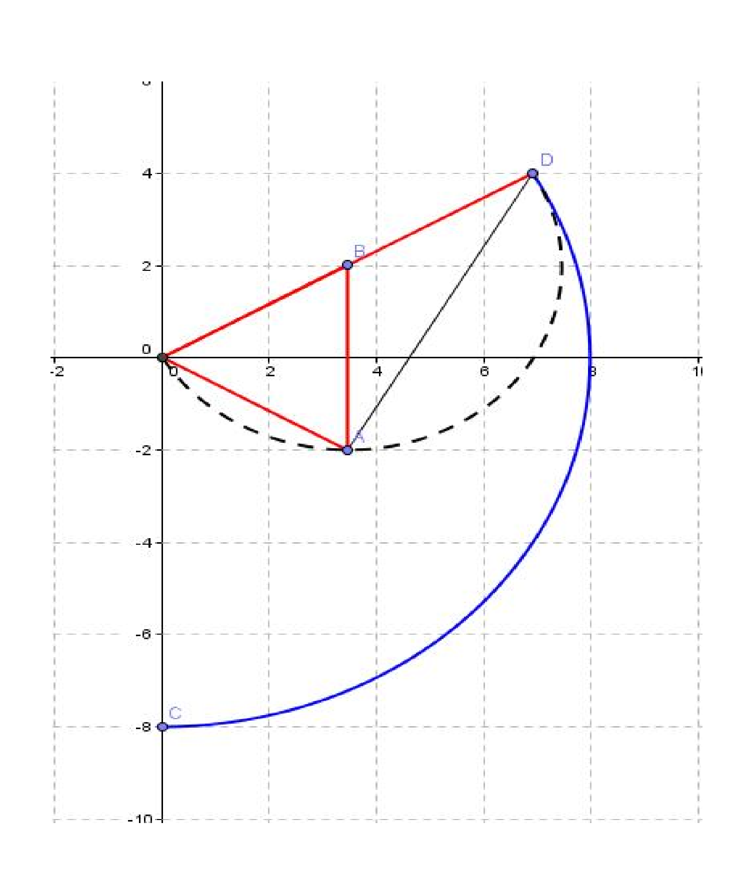
ت) برهن أن المثلث OAB متقايس اللأضلاع.

3.نسمي النقطة C ذات اللاحقة $z_C=-8i$ و النقطة D صورتها بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

- علم النقطتان C و D. ثم برهن أن لاحقة النقطة D هي $z_D=4\sqrt{3}+4i$.

4.برهن أن النقطة D هي صورة النقطة B بتحاك h مركزه O يطلب تعيين نسبته .

5.أحسب النسبة $\frac{z_A-z_D}{z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAD .



1.لدينا : $z^2-4\sqrt{3}z+16=0$

$\Delta=-16=16i^2$ ، $z_1=\frac{4\sqrt{3}-4i}{2}=2\sqrt{3}-2i$

، $z_2=\overline{z_1}=2\sqrt{3}+2i$

2. أ) $z_B=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=4e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_A=2\sqrt{3}-2i=\overline{z_B}==4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ب) أنظر الشكل

ت) لدينا : $OA=|z_A|=4$ ، $OB=|z_B|=4$

ث) ومن جهة أخرى :

$AB=|z_B-z_A|=\left|2\sqrt{3}+2i-(2\sqrt{3}-2i)\right|=|4i|=4$

ومنه $OA=OB=AB$ و المثلث OAB متقايس اللأضلاع.

3.- تعليم النقطتان C و D أنظر الشكل .

- لدينا : $z'-0=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ ومنه : $z_D=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-8i)=4\sqrt{3}+4i$

4.نلاحظ أن : $z_D=2z_B$ و بعبارة أخرى : $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB}$ و هذا يعني أن النقطة D هي صورة النقطة B بتحاك h مركزه O و نسبته 2 .

5. لدينا : $\frac{z_A-z_D}{z_A}=\frac{2\sqrt{3}-2i-(4\sqrt{3}+4i)}{2\sqrt{3}-2i}=\frac{-2\sqrt{3}-6i}{2\sqrt{3}-2i}=-i\sqrt{3}$ ومنه :

$\arg\left(\frac{z_A-z_D}{z_A}\right)=\arg\left(-i\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{2}(2\pi)$ أي : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{\pi}{2}$ و المثلث OAD قائم في A .

التمرين الثالث　　باك تجريبي بلحاج قاسم نور الدين 2014 م1 رياضي و التقني

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط C,B,A و D لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}, z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}, z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$

بين أن النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=3$ يطلب تعيين نصف قطرها .

3) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة الى المبدأ O.

أ) بين أن : $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC.

ب) بين أنه يوجد دوران R مركزه النقطة B ويحول النقطة E الى النقطة C. يطلب تعيين زاويته .

4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث ، $z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z+i\sqrt{3}\right)$.

أ) عين طبيعة S وعناصره المميزة .

حل التمرين

1) حل المعادلة $(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$:

$(z^2+3)(z^2-6z+21)=0$ يكافئ $z^2+3=0$ **أو** $z^2-6z+21=0$

- **حل المعادلة** $z^2+3=0$:

$z^2+3=0$ يكافئ $z^2=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ يكافئ $z=i\sqrt{3}$ **أو** $z=-i\sqrt{3}$

- **حل المعادلة** $z^2-6z+21=0$:
- حساب المميز : $\Delta=(-6)^2-4(1)(21)=36-84=-48$

$\Delta=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$

- المعادلة تقبل حلين هما : $z_1 = \frac{6-4i\sqrt{3}}{2} = 3-2i\sqrt{3}$ و $z_2 = \overline{z_1} = 3+2i\sqrt{3}$
- **مجموعة حلول المعادلة :** $S = \left\{-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, 3-2i\sqrt{3}, 3+2i\sqrt{3}\right\}$

2) لدينا $z_A = i\sqrt{3},\ z_B = -i\sqrt{3},\ z_c = 3+2i\sqrt{3}$ و $z_D = 3-2i\sqrt{3}$

- **تبيان أن النقط** C, B, A **و** D **تنتمي الى نفس الدائرة** (C) **ذات المركز** $\Omega(z_\Omega = 3)$ **:**

لدينا : $\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |i\sqrt{3} - 3| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |-i\sqrt{3} - 3| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Omega C = |z_C - z_\Omega| = |3+2i\sqrt{3} - 3| = |2i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Omega D = |z_D - z_\Omega| = |3-2i\sqrt{3} - 3| = |-2i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

إذن : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = 2\sqrt{3}$

ومنه النقط C, B, A و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(z_\Omega = 3)$ ونصف قطرها $r = 2\sqrt{3}$

3) لدينا النقطة E **هي نظيرة النقطة** D **بالنسبة الى المبدأ** O **:**

أي $z_E = -3+2i\sqrt{3}$

أ) اثبات أن $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ **:**

أي $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}} = \frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}$

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})} = \frac{-1-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{4}$$

ومنه $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{2}{4} - i\frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

- **استنتاج طبيعة المثلث** BEC:

لدينا : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني $\frac{BC}{BE} = 1$ ومنه $BC = BE$ و $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{3}$

أي أن المثلث BEC **متقايس الأضلاع**

ب) تبيان أنه يوجد دوران R **مركزه النقطة** B **و يحول النقطة** E **الى النقطة** C **:**

لدينا : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني $z_C - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_B)$

أي $a = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ **ومنه يوجد دوران** R **مركزه** B **ويحول النقطة** E **الى النقطة** C

زاويته $\theta = -\frac{\pi}{3}$

4) لدينا العبارة المركبة للتحويل S من الشكل $z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z+i\sqrt{3}\right)$



أ) تعيين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة :

- لدينا عبارة التحويل S من الشكل $z'-z_{\omega}=a\left(z-z_{\omega}\right)$

حيث : $a=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $z_{\omega}=-i\sqrt{3}$

- لدينا : $|a|=\left|2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right|=2$ ومنه S تشابه مستوي مباشر نسبته $|a|=2$

وزاويته $\theta=\arg(a)=-\frac{\pi}{3}$ ومركزه النقطة ω ذات اللاحقة $z_{\omega}=-i\sqrt{3}=z_{B}$

أي مركزه النقطة B

ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق :

$z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$

- لدينا : $z=3+2\sqrt{3}e^{i\theta}$ يعني $z-3=2\sqrt{3}e^{i\theta}$

ومنه $|z-3|=2\sqrt{3}$ أي $\Omega M=2\sqrt{3}$

وبالتالي المجموعة المطلوبة (E) هي الدائرة (C) ذات المركز $\Omega\left(z_{\Omega}=3\right)$ ونصف قطرها

$r=2\sqrt{3}$

ج) تعيين طبيعة (E') صورة (E) بالتحويل S وعناصرها الهندسية :

صورة الدائرة (C) بالتشابه S هي دائرة (C') مركزها Ω' صورة Ω بالتحويل S

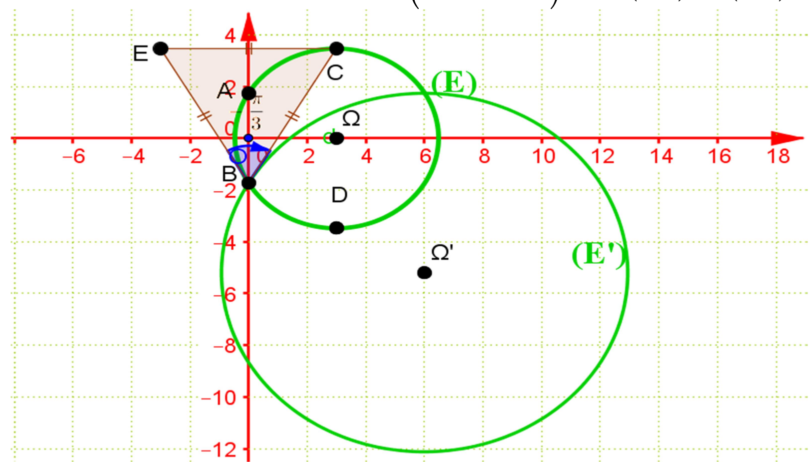
ونصف قطرها $r'=2r=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

- لدينا : $z_{\Omega'}+i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(z_{\Omega}+i\sqrt{3}\right)$

- أي $z_{\Omega'}+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)$ ومنه

$$z_{\Omega'}=\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)-i\sqrt{3}=3+i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}=6-3i\sqrt{3}$$

مركز الدائرة $(E')=(C')$ هو $\Omega'\left(6-3i\sqrt{3}\right)$ و نصف قطرها $r'=4\sqrt{3}$



التمرين الرابع — باك تجريبي بلحاج قاسم نور الدين 2014 م2 رياضي و التقني

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث: $z^2-2\sqrt{3}\,z+4=0$.

2) أكتب الحلول على الشكل المثلثي .

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-\sqrt{3}-i$

أ) عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع

ب) كتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_C

ت) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ حقيقي .

4) ليكن التحويل النقطي S الذي بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقط M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}+3i$

أ) تعرف على طبيعة التحويل S و أعط عناصره المميزة

ب) بين أن المجموعة (Γ) للنقط M و التي تحقق $(z-z_A)\overline{(z-z_A)}=z_C.\overline{z_C}$ **هي دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها**

ت) عين المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S و أعط عناصره المميزة .

حل التمرين

1) حل المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

- حسب المميز : $\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\times4=12-16=-4=(2i)^2$
- المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$, $z_2=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$

مجموعة الحلول $S=\left\{\sqrt{3}-i,\ \sqrt{3}+i\right\}$

2) كتابة الحلول على الشكل المثلثي:

- لدينا : $z_1=\sqrt{3}+i$

حساب الطويلة : $|z_1|=\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

تعيين عمدة للعدد $z_1=\sqrt{3}+i$:

نضع $\theta_1=\arg(z_1)$ لدينا $\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z})$ **اي** $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

- **كتابة** $z_2=\sqrt{3}-i$ **على الشكل المثلثي :**

$$z_2=\overline{z_1}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

3) لدينا : $z_A=\sqrt{3}+i,\ z_B=\sqrt{3}-i,\ z_C=-\sqrt{3}-i$

أ) تعيين z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع :

$ABCD$ متوازي أضلاع يعني $z_{\overrightarrow{AD}}=z_{\overrightarrow{BC}}$

أي $z_D-z_A=z_C-z_B$ ومنه

$$z_D=z_C-z_B+z_A=-\sqrt{3}-i-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}+i=-\sqrt{3}+i$$

أي $z_D=-\sqrt{3}+i$

ب) كتابة الأعداد $z_A,\ z_B,\ z_C$ على الشكل الأسي :

- لدينا : $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}},\ z_B=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ولدينا : $z_C=-z_A=-2e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\pi}\times e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ أي $z_C=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ج) تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ حقيقيا :

- لدينا : $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^n\times\left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2}\right)^n\times\left(\frac{2e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2}\right)^n$

أي $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{6}}\times e^{-i\frac{n\pi}{6}}\times e^{i\frac{7n\pi}{6}}=e^{i\frac{7n\pi}{6}}$

$\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ **حقيقي يعني** $\sin\frac{7n\pi}{6}=0$

ومنه $\frac{7n\pi}{6}=k\pi$ أي $7n\pi=6k\pi$ إذن $7n=6k$ مع $k=7\alpha$

وبالتالي $n=6\alpha$ **مع** $\alpha\in\mathbb{N}$

4) لدينا العبارة المركبة للتحويل S **من الشكل :** $z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}+3i$

أ) تعيين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة :

لدينا S **من الشكل** : $z'=az+b$ حيث $a=1-i\sqrt{3}\ ,\ b=-\sqrt{3}+3i$

إذن : $|a|=\left|1-i\sqrt{3}\right|=2$ ومنه S تشابه مستوي مباشر نسبته $|a|=2$

وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ $\theta=\arg(a)=\arg\left(1-i\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$ لان $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

ومركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{1-1+i\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{i\sqrt{3}}\times\frac{-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}}=\sqrt{3}+i$

أي $z_\Omega=\sqrt{3}+i=z_A$

مركز التشابه هو النقطة $A\left(\sqrt{3}+i\right)$

ب) تعيين طبيعة (Γ) **مجموعة النقط** $M(z)$ **التي تحقق** $(z-z_A)(\overline{z-z_A})=z_C\overline{z_C}$

- **لدينا :** $(z-z_A)(\overline{z-z_A})=|z-z_A|^2$ و $z_C\overline{z_C}=|z_C|^2=4$

$(z-z_A)(\overline{z-z_A})=z_C\overline{z_C}$ يكافئ $|z-z_A|^2=4$

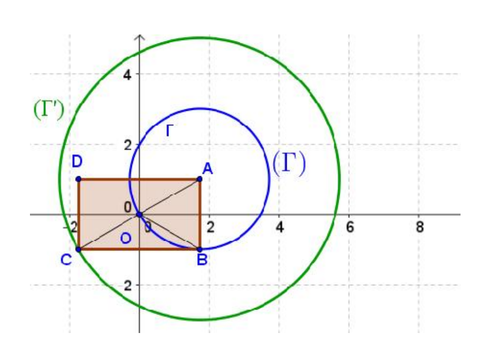
ومنه $|z-z_A|=2$ أي $AM=2$

وبالتالي المجموعة (Γ) هي دائرة مركزها $A(\sqrt{3}+i)$ ونصف قطرها $r=2$

ج) تعيين (Γ') **صورة** (Γ) **بالتحويل** S:

(Γ') هي دائرة مركزها $A(\sqrt{3}+i)$ لان $S(A)=A$ ونصف قطرها $r'=2r=2\times2=4$

الرسم :



التمرين الخامس   باك تجريبي بلحاج قاسم نور الدين 2015 م1 علوم تجريبية

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_{¯}):\ z^2+4z\cos¯+4=0$ حيث $¯\in]0;®[$.

1) بدون حل للمعادلة $(E_{¯})$ أثبت أنه إذا كان ~ حل للمعادلة $(E_{¯})$ فإن $\bar{~}$ هو كذالك حلا لها .

2) نضع : $z_1=-2\cos¯+2i\sin¯$ و $z_2=-2\cos¯-2i\sin¯$.

أ- تحقق أن z_1 , z_2 هما حلي المعادلة $(E_{¯})$.

ب- أكتب z_1 , z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي .

ج-استنتج قيمة ¯ التي من أجلها يكون OM_1M_2 مثلث قائم في O حيث M_2 و M_1 نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_1 , z_2 .

د-عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z لما ¯ تمسح $\mathbb{R}$ حيث $z=2e^{i¯}+3$

3) نعتبر $¯\equiv\frac{®}{3}[2®]$ و النقط A , B , C لواحقها على الترتيب z_1 , z_2 و 2

أ- التحقق أن $\frac{z_2-2}{z_1-2}=e^{i\frac{®}{3}}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب- عين مركز و نصف قطر الدائرة (Γ_1) المحيطة بالمثلث ABC .

4) نعتبر التحويل النقطي S_1 في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z'=iz+3$.

أ-عين طبيعة التحويل S_1 و عناصره المميزة .

ب-عين (Γ') صورة الدائرة (Γ_1) تحقق أن (Γ) جزء من (Γ') .

حل التمرين

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_\theta): z^2 + 4z\cos\theta + 4 = 0$ حيث $\theta \in]0;\pi[$.

1) اثبات أنه إذا كان α حل للمعادلة (E_θ) فإن $\alpha^2 + 4\alpha\cos\theta + 4 = 0$ يكافئ $\overline{\alpha^2 + 4\alpha\cos\theta + 4 = 0}$ أي ان

$\overline{\alpha}^2 + 4\overline{\alpha}\cos\theta + 4 = 0$ و منه $\overline{\alpha}$ هو كذالك حل لهذه المعادلة .

2) نضع : $z_1 = -2\cos\theta + 2i\sin\theta$ و $z_2 = -2\cos\theta - 2i\sin\theta$.

أ-التحقق أن z_1 حل المعادلة (E_θ) يعني

$(-2\cos\theta + 2i\sin\theta)^2 + 4(-2\cos\theta + 2i\sin\theta)\cos\theta + 4 = 0$ أي ان

$4\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2i\sin\theta.\cos\theta\right) + 4\left(-2\cos^2\theta + 2i\sin\theta.\cos\theta\right) + 4 = 0$

$4\left(-\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 4 = 0$ بما ان $\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 1$ فإن $-4 + 4 = 0$ بما أن z_1 حل المعادلة (E_θ) فإن $\overline{z_1}$ حل لهذه المعادلة أي $\overline{z_1} = z_2$ حل.

ب-الكتابة على الشكل الأسي $z_1 = -2\cos\theta + 2i\sin\theta = 2(-\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)) = 2e^{i(\pi-\theta)}$ و

$z_2 = -2\cos\theta - 2i\sin\theta = 2(-\cos\theta - i\sin\theta) = 2(\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)) = 2e^{i(\pi+\theta)}$

$z_1 = 2e^{i(\pi-\theta)}$, $z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)}$ و $\frac{z_1}{z_2} = e^{-2i\theta}$.

ج-لستنتاج قيمة θ التي من أجلها يكون OM_1M_2 مثلث قائم في O يعني $\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ و لدينا

$\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}\right) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 2\theta$ نُطابق نجد $2\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ و منه $2\theta = \frac{\pi}{2} + \pi k \ : k \in \mathbb{Z}$ إذن

$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \ : k \in \mathbb{Z}$.

د-تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z = 2e^{i\theta} + 3$ هي دائرة مركزها ذو اللاحقة 3 و نصف قطرها 2 .

3) نعتبر $\theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ و النقط A , B , C لواحقها على الترتيب z_1 , z_2 و 2

أ- التحقق أن $\frac{z_2 - 2}{z_1 - 2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$: لدينا

$$\frac{z_2 - 2}{z_1 - 2} = \frac{-2\cos\theta - 2i\sin\theta - 2}{-2\cos\theta + 2i\sin\theta - 2} = \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

و منه المثلث ABC متقايس الاضلاع .

ب- تعيين مركز و نصف قطر الدائرة (Γ_1) المحيطة بالمثلث ABC بما أن $|z_2| = |z_1| = 2$ فإن النقط A , B , C تنتمي إلى الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 2

4) نعتبر التحويل النقطي S_1 في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z' = iz + 3$.

تعيين طبيعة التحويل S_1 و عناصره المميزة بما أن $|i| = 1$ فهو دوران زاويته $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ و مركزه ذو اللاحقة

$z_0 = \frac{3}{1-i} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

التمرين السادس **باك تجريبي بلحاج قاسم نور الدين 2015 م 1 رياضي والتقني**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-8z+17=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط D, B, A التي

لواحقها على الترتيب $a=4-i$, $b=4+i$ و $d=-i$.

و ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\mu=2$ و زاويته $\frac{®}{2}$

أ) بين أنَ العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z'=iz+2-2i$.

ب) تحقق أنَ لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c=1+2i$.

ج) بين أنَ : $\frac{c-d}{c-b}=-i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث BCD .

د) بين أنَ النقط C, B, A و D تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها .

ه) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون ، $|-i-z|^2-|4-i-z|^2=16$.

حل التمرين

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

- **حل المعادلة :** $z^2-8z+17=0$
  - حساب المميز Δ : $\Delta=(-8)^2-4(1)\times(17)=-4$ أي $\Delta=(2i)^2$
  - المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{8-2i}{2}=4-i$ ، $z_2=\frac{8+2i}{2}=4+i$

  مجموعة الحلول: $S=\{4-i;4+i\}$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر

النقط D, B, A التي لواحقها على الترتيب $a=4-i$, $b=4+i$ و $d=-i$.

و ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\omega=2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ) بين أنَ العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z'=iz+2-2i$.

- **تبيان أن العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z'=iz+2-2i$:**
  - العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z'-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$

  أي $z'-2=i(z-2)$ ومنه $z'=i(z-2)+2=iz+2-2i$

  إذن $z'=iz+2-2i$

ب) تحقق أنَ لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c=1+2i$

- **التحقق أن لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c=1+2i$:**

- لدينا : $R(B)=C$ يعني

$c=i\times b+2-2i=i(4+i)+2-2i=4i-1+2-2i=1+2i$ $\qquad c=1+2i$

ج) بين أنَ : $\dfrac{c-d}{c-b}=-i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث BCD.

- **تبيان أن** $\dfrac{c-d}{c-b}=-i$:

- لدينا : $\dfrac{c-d}{c-b}=\dfrac{1+2i-(-i)}{1+2i-(4+i)}=\dfrac{1+3i}{-3+i}=\dfrac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}$

ومنه $\dfrac{c-d}{c-b}=\dfrac{-3-i-9i+3}{9+1}=\dfrac{-10i}{10}=-i$

- **استنتاج طبيعة المثلث** BCD:

- لدينا : $\left|\dfrac{c-d}{c-b}\right|=|-i|=1$ ولدينا $\arg\left(\dfrac{c-d}{c-b}\right)=\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$
- يعني $\dfrac{DC}{BC}=1$ أي $DC=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DC}$

إذن المثلث BCD **قائم في** C **ومتساوي الساقين**

د) بين أنَ النقط A,B,C **و** D **تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها**

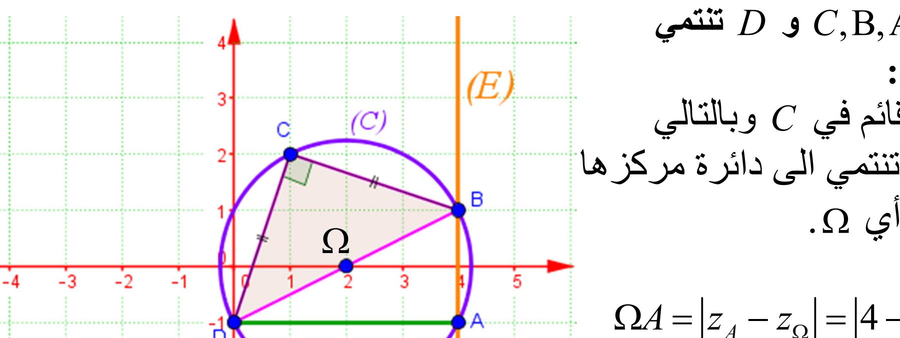
- **تبيان أنَ النقط** A,B,C **و** D **تنتمي الى نفس الدائرة :**

المثلث BCD قائم في C وبالتالي النقط B,C,D تنتمي الى دائرة مركزها منتصف الوتر أي Ω.

ولدينا :

$\Omega A=|z_A-z_\Omega|=|4-i-2|=|2-i|$

$\Omega A=\sqrt{5}$



إذن : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=\sqrt{5}$

ومنه النقط A,B,C و D تنتمي الى نفس الدائرة

مركزها $\Omega(2;0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{5}$.

ه) **عين** (E) **مجموعة النقط** M **من المستوي ذات اللاحقة** z **بحيث يكون ،**

$|-i-z|^2-|4-i-z|^2=16$.

- **تعيين مجموعة النقط** (E) **من المستوي والتي تحقق :** $|-i-z|^2-|4-i-z|^2=16$:

$|-i-z|^2-|4-i-z|^2=16$ **يعني** $MD^2-MA^2=16$

ولتكن النقطة I منتصف القطعة $[DA]$

إذن لدينا : $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=16$

أي $\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{ID}^2-\overrightarrow{MI}^2-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IA}^2=16$

ومنه $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=16$ لان $\overrightarrow{ID}^2=\overrightarrow{IA}^2$ (I منتصف القطعة $[DA]$)

وبالتالي : $2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IA})=16$ أي $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AD}=16$

إذن : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DA}=8$

لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على (DA) حيث $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{DA}=8$

أي $IH\times DA=8$

- ولدينا : $DA=|z_A-z_D|=|4-i+i|=|4|=4$ وبالتالي $IH=2$
- **وبالتالي H منطبقة على النقطة A.**

إذن $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DA}=8$ يعني $(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HM}).\overrightarrow{DA}=8$

ومنه $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{DA}=8$ أي $8+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{DA}=8$

وبالتالي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DA}=0$ (لان $H=A$)

المجموعة (E) هي المستقيم العمودي على (DA) و المار من A أي

$(E)=(AB)$

أوبطريقة أخرى :

$|-i-z|^2-|4-i-z|^2=16$ **يعني** $|-i-x-iy|^2-|4-i-x-iy|^2=16$

ومنه : $|-x+i(-1-y)|^2-|4-x+(-1-y)|^2=16$

أي $(-x)^2+(-1-y)^2-(4-x)^2-(-1-y)^2=16$ ومنه

$x^2-16+8x-x^2=16$

ومنه : $8x=32$

وبالتالي : $x=4$ المجموعة (E) هي المستقيم ذي المعادلة $x=4$ العمودي على $(x'x)$ والمار من النقطة A

التمرين السابع — باك تجريبي عبد الحميد بن باديس 2015 م1 رياضي والتقني

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ النقط :

A ، B و C التّي لاحقاتها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=-1-i\sqrt{3}$, $z_C=2$

أ) بيّن أنّ $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب) عيّن طبيعة المثلث ABC.

ج) عيّن مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثّلث ABC. أرسم (C)

1. **أ)** عيّن الطبيعة و العناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقّق $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$.

ب) تحقق أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ).

2. ليكن R الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ- عيّن صورة النقطة B بالدوران R

ب- عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج- عيّن صورة المجموعة ( ) بالدوران R

حل التمرين

I. **حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :** $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$ **معناه** $\begin{cases}(z-2)=0..............(1)\\(z^2+2z+4)=0....(2)\end{cases}$ و منه من (1) نجد $z=2$

و من نحس الميز حيث $\Delta=-12=12i^2$ و منه $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}i$ يوجد حلان هما

$z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=-1-i\sqrt{3}$ و بالتالي $S=\{2;-1-i\sqrt{3};-1+i\sqrt{3}\}$

II. نعتبر في المستوي المركب : $z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=-1-i\sqrt{3}$, $z_C=2$

أ) نبيّن أنّ $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ **:**

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{(-3-i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}{(-3+i\sqrt{3})}$$

و منه $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{6+6i\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و منه $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC : المثلث ABC متقايس الأضلاع

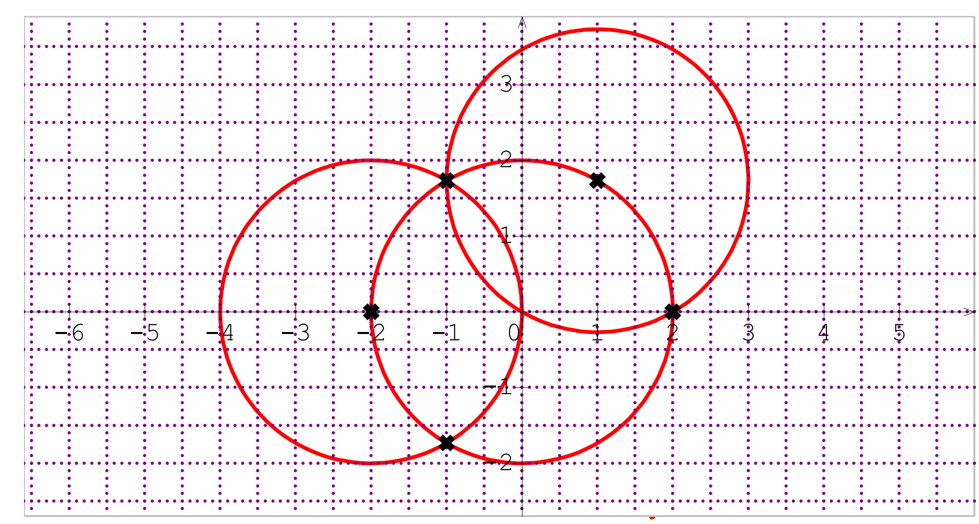
ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثّلث ABC. أرسم (C)

مركز الدائرة (C) المحيطة بالمثّلث ABC هو Ω مركز ثقل المثلث حيث $z_\Omega=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$

أي $z_\Omega=\frac{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}+2}{3}=0$ و منه $\Omega(0;0)$

ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC هو $OA=OB=OC=|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$

الرسم (C):



1.أ) تعيين الطبيعة و العناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقّق: $2(z+\overline{z})+z\overline{z}=0$.

ليكن $z=x+iy$ و منه لدينا $z+\overline{z}=2\text{Re}(z)=2x$ و $z\overline{z}=x^2+y^2$ و منه

$2(z+\overline{z})+z\overline{z}=0$ تكافئ $2(2x)+x^2+y^2=0$ و منه $4x+x^2+y^2=0$

تكافئ $(x+2)^2+y^2=4$ و منه للمجموعة (Γ) هي دائرة مركزها $\omega(-2.0)$ ونصف قطرها $r=2$

ب) التحقق من أنّ النقطتين A **و** B **تنتميان إلى** (Γ):

لدينا $A(-1;\sqrt{3});B(-1;-\sqrt{3})$ بالتعويض في المعادلة $(x+2)^2+y^2=4$ نجد

$\begin{cases}(-1+2)^2+(-\sqrt{3})^2=4\\(-1+2)^2+(\sqrt{3})^2=4\end{cases}$ و منه احداثيات $A;B$ تحقق المعادلة $(x+2)^2+y^2=4$

2. ليكن R **الدوران الذي مركزه** A **و زاويته** $\frac{\pi}{3}$

لدينا $|a|=1$ و $\arg a=\frac{\pi}{3}$ اذن $a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ولدينا $Z_A=\frac{b}{1-a}$ ومنه $b=Z_A(1-a)=1+\sqrt{3}i$

اذن الكتابة المركبة للدوران من الشكل $Z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z+1+\sqrt{3}i$

أ- تعيّن صورة النقطة B **بالدوران** R

صورة B بالدوران R هي C لان: $Z_C=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z_B+1+\sqrt{3}i=2$

ب- تعيين z_D **لاحقة النقطة** D **صورة النقطة** C **بالدوران** R: $Z_D=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)Z_C+1+\sqrt{3}i=2+2\sqrt{3}i$

- **استنتاج طبيعة الرباعي** $ABCD$: معيّن

ج- عيّن صورة المجموعة (Γ) بالدوران R

صورة المجموعة (Γ) بالدوران R هي دائرة مركزها $\omega'(1;\sqrt{3})$ ونصف قطرها $r=2$

التمرين الثامن **باك تجريبي مقاطعة ميلة 1 م 1 رياضي والتقني**

في كل يلي المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A_2,A_1,A_0 لواحقها على الترتيب: z_2,z_1,z_0 حيث $z_2=-4-i, z_1=-1-4i, z_0=5-4i$.

1) ا- بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث: $S\left(A_0\right)=A_1$ و $S\left(A_1\right)=A_2$.

ب- اثبت أنّ العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z'=\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{-3+i}{2}$.

ج- استنتج النّسبة والزاوية واللاحقة ω للمركز Ω للتشابه S.

د- نعتبر النقطة M لاحقتها z حيث $z\neq\omega$ و صورتها $M'\left(z'\right)$ بواسطة S.

تحقق من أنّ $\omega-z'=i\left(z-z'\right)$. واستنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n. نعرف متتالية النقط $\left(A_n\right)$ كما يلي: $A_{n+1}=S\left(A_n\right)$ و نضع $v_n=A_nA_{n+1}$

ا) مثل النقط A_2,A_1,A_0 وأنشئ هندسيا النقط A_6,A_5,A_4,A_3.

ب) برهن أنّ المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$. عيّن حدها الأوّل v_0

3) المتتالية $\left(U_n\right)$ معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n=v_0+v_1+...+v_n$.

ا) عبر عن v_n بدلالة n .

ب) هل المتتالية $\left(U_n\right)$ متقاربة؟

4) احسب بدلالة n الطول ℓ_n حيث: $\ell_n=\Omega A_n$ ثمّ عيّن أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n\langle 0.06$.

حل التمرين

لدينا النقط A_2,A_1,A_0 لواحقها على الترتيب: z_2,z_1,z_0 حيث $z_2=-4-i, z_1=-1-4i, z_0=5-4i$.

❶ ا- بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث: $S\left(A_0\right)=A_1$ و $S\left(A_1\right)=A_2$:

بما أن $A_0\neq A_1$ و $A_1\neq A_2$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A_0 إلى A_1 ويحول A_1 إلى A_2

ب – اثبات أنّ العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z'=\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{-3+i}{2}$:

لدينا $\begin{cases}S(A_0)=A_1\\S(A_1)=A_2\end{cases}$ معناه $\begin{cases}z_1=az_0+b....(1)\\z_2=az_1+b....(2)\end{cases}$ وبطرح العبارتين نجد $z_2-z_1=a(z_1-z_0)$ ومنه

$a=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_0}=\frac{1-i}{2}$ بالتعويض بقيمة a في المعادلة (1) أو (2) نجد $b=\frac{-3+i}{2}$

ومنه العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z'=\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{-3+i}{2}$

ج – استنتاج النسبة والزاوية واللاحقة ω للمركز Ω للتشابه S :

- نسبة التشابه هي $|a|=\left|\frac{1-i}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

- زاوية التشابه S هي $\arg(a)=\arg\left(\frac{1-i}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$
- لاحقة المركز Ω هو w حيث $w=\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{-3+i}{2}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{-3+i}{1+i}$ وبالضرب في مرافق المقام نجد

$$w=-1+2i$$

د - النقطة M لاحقتها z حيث $z\neq\omega$ و صورتها $M'(z')$ بواسطة S

- التحقق أن $\omega-z'=i(z-z')$. واستنتاج طبيعة المثلث $\Omega MM'$

$$\frac{w-z'}{z-z'}=\frac{-1+2i-\left(\frac{1-i}{2}\right)z-\frac{-3+i}{2}}{z-\left(\frac{1-i}{2}\right)z-\frac{-3+i}{2}}=i$$

- لدينا $\left|\frac{w-z'}{z-z'}\right|=|i|=1$ معناه المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين .... (1)

لدينا أيضا $\arg\left(\frac{w-z'}{z-z'}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ معناه المثلث $\Omega MM'$ قائم في M' ......(2) (لاحقة M' موجودة في البسط والمقام).

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين و قائم في M' .

❷ من أجل كل عدد طبيعي n , نعرف متتالية النقط (A_n) كما يلي: $A_{n+1}=S(A_n)$ و نضع $v_n=A_nA_{n+1}$

ا) تمثيل النقط A_2,A_1,A_0 **وانشاء هندسيا النقط** A_6,A_5,A_4,A_3 .

- لدينا $A_2(-4,-1),A_1(-1,-4),A_0(5,-4)$
- من جهة أخرى لدينا $A_{n+1}=S(A_n)$ معناه $S(A_0)=A_1$, $S(A_1)=A_2$, $S(A_2)=A_3$ ....الخ

ومنه نستنتج أن $(S0S)(A_0)=A_2$, $(S0S)(A_1)=A_3$ و $(S0S)(A_2)=A_4$ ....الخ

أي التشابه $S0S$ يحول A_0 إلى A_2 و يحول A_1 إلى A_3 ويحول A_2 إلى A_4 ...الخ

حيث $S0S$ هو مركب تشابهين نسبته جداء النسبتين وزاويته هي مجموع الزاويتين .

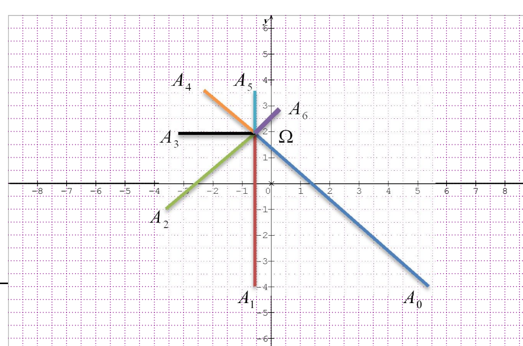
بما ان نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن نسبة التشابه $S0S$ هي $\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

بما ان زاوية التشابه S هي $-\frac{\pi}{4}$ فإن زاوية التشابه $S0S$ هي $\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$

لدينا مثلا : $\Omega A_2=\frac{1}{2}\Omega A_0$ و $\left(\overrightarrow{\Omega A_0},\overrightarrow{\Omega A_2}\right)=-\frac{\pi}{2}$ لأن A_2 صورة A_0 بالتشابه $S0S$

$\Omega A_3=\frac{1}{2}\Omega A_1$ و $\left(\overrightarrow{\Omega A_1},\overrightarrow{\Omega A_3}\right)=-\frac{\pi}{2}$ لأن A_3 صورة A_1 بالتشابه $S0S$ .... الخ

<u>الإنشاء :</u>



ب) اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$.وتعيين حدها الأوّل v_0

لدينا $v_n = A_nA_{n+1}$, ومنه $v_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2}$ ومنه $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{A_{n+1}A_{n+2}}{A_nA_{n+1}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}A_nA_{n+1}}{A_nA_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

لأن $\begin{cases} S(A_n) = A_{n+1} \\ S(A_{n+1}) = A_{n+2} \end{cases}$ أي $A_{n+1}A_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}A_nA_{n+1}$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها الأول $v_0 = A_0A_1 = \sqrt{(-1-5)^2 + (-4+4)^2} = 6$

❸ المتتالية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

ا) التعبير عن v_n بدلالة n: $v_n = v_0q^n$ ومنه $v_n = 6.\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ أي $v_n = 12.\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2-\sqrt{2}}$

ب) بما أن $1 \succ q = \frac{\sqrt{2}}{2} \succ -1$ فإن (v_n) متقاربة وبما أن U_n هي مجموع حدود متتابعة لحدود (v_n) المتقاربة فإن (U_n) متقاربة.

❹حساب بدلالة n الطول ℓ_n حيث: $\ell_n = \Omega A_n$ ثمّ تعيين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n \langle 0.06$

لدينا $\ell_n = \Omega A_n$ ومنه $\ell_{n+1} = \Omega A_{n+1}$ ومنه لدينا $\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{\Omega A_{n+1}}{\Omega A_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n}{\Omega A_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

أي (ℓ_n) متتالية هندسية أساسها $q' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها العام هو $\ell_n = \ell_0.(q')^n$ أي $\ell_n = \Omega A_0.(q')^n$

وبالتالي $\ell_n = \sqrt{(5+1)^2 + (-4-2)^2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ومنه $\ell_n = 6\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

- **أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n \langle 0.06$:**

$\ell_n \langle 0.06$ معناه $6\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \prec 0,06$ ومنه $\ln 6\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \prec \ln(0,06)$ ومنه

$\ln 6\sqrt{2} + n\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \prec -2\ln 6$ وبالتالي $n \prec \frac{-2\ln 6 - \ln 6\sqrt{2}}{\ln\sqrt{2} - \ln 2}$

التمرين التاسع — باك تجريبي مقاطعة ميلة 1م 2 رياضي والتقني

1- حل ،في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $(z-2)(z^2-2z+4)=0$.

2- المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب، z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$

أ – اكتب شكلا أسيا لكل من z_B و z_C .

ب- أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}$.

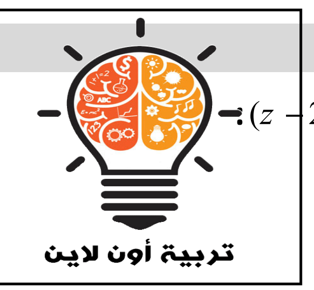
ج-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $z_B{}^n$ عددا حقيقيا سالبا .

3- أ- اكتب على الشكل الأسي العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب- استنتج أن C هي صورة B بتحويل نقطي ، يطلب تعيينه بدقة ثمّ عيّن عناصره المميزة .

4- حدد مع التعليل طبيعة الرباعي $OBAC$.

حل التمرين



❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة ، $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2-2z+4)=0.........(E)$:

لدينا $(z-2)(z^2-2z+4)=0$ تكافيء $\begin{cases} z=2..................(1) \\ z^2-2z+4=0.......(2) \end{cases}$

- حل المعادلة (2) : لدينا $\Delta'=b'^2-ac=(-1)^2-1.4=-3=i^2.3$ ومنه $\sqrt{\Delta'}=i\sqrt{3}$

ومنه نجد $z_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1-i\sqrt{3}}{1}=1-i\sqrt{3}$, $z_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1}=1+i\sqrt{3}$

ومنه المعادلة (E) لها ثلاثة حلول في $\mathbb{C}$ وهي : $z_C=1-i\sqrt{3}, z_B=1+i\sqrt{3}, z_A=2$

❷ أ) كتابة شكلا أسيا لكل من z_B و z_C :

* $|z_B|=|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$, $\arg z_B=\arg(1+i\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $z_B=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

* $|z_C|=|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$, $\arg z_C=\arg(1-i\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب) الشكل الجبري للعدد $\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}$:

$$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}=\left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{2015}=\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2015}=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{2015}=\cos\left(\frac{-2015\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2015\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi-2016\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi-2016\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi.(-336)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi.(-336)\right)$$

وبالتالي $\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ج) قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $z_B{}^n$ عددا حقيقيا سالبا :

$(z_B)^n$ حقيقي سالب معناه $\arg(z_B)^n=k\pi$

$$\arg(z_B)^n = \arg\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = \arg\left(2^n.e^{i\frac{n\pi}{3}}\right) = \frac{n\pi}{3}$$

ومنه $\arg(z_B)^n = k\pi$ معناه أن $\frac{n\pi}{3} = k\pi$ وبالتالي $n = 3k \ / \ k \in \mathbb{Z}$

❸ **أ– كتابة على الشكل الأسي العدد** $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 - i\sqrt{3} - 2}{1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = -\frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)^2}{4} = -\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}{4} = -\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\pi}.e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

وبالتالي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$

ب – استنتاج أن C هي صورة B بتحويل نقطي :

لدينا $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|e^{i\frac{5\pi}{3}}\right| = 1$ ولدينا $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{5\pi}{3}[2\pi]$ ومنه C هي صورة B بالدوران الذي مركزه Aذات اللاحقة $z_A = 2$ وزاويته $\frac{5\pi}{3}$.

❹ **تحديد مع التعليل طبيعة الرباعي** $OBAC$:

لدينا $AC = AB$, $\left(\overline{AC}, \overline{AB}\right) = \frac{5\pi}{3}$ و لدينا أيظا B و C متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل ومنه الرباعي $OBAC$ **معين .**

التمرين العاشر **باك تجريبي**

1. عين العددين الحقيقيين a و bبحيث : $(a+i)^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$ و$(b-i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$
2. أ/ حل في مجموعة الاعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $z^2 - 4z + 16 = 0$
   ب/ استنتج في المجموعة $(\mathbb{C})$، حلول المعادلة : $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$
3. نعتبر العدد المركب y_k المعرف كمايلي : $y_k = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ ، حيث : k عدد صحيح
   - بين أن $y_k = \frac{i}{2^{k-1}} \sin\frac{k\pi}{3}$ ، ثم استنتج أن $y_{2013} = 0$ و أكتب العدد $2^{2015} y_{2015}$ على الشكل $\sqrt{\alpha}i$ حيث α عدد طبيعي يطلب تحديده
4. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين على الترتيب : $Z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$ و $Z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ و لتكن C النقطة ذات اللاحقة : $Z_C = 5 + 2^{2015} y_{2015}$
   أ. تحقق أن : $Z_C = \frac{3}{2} Z_A + Z_B$
   ب/ بين أن $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = 2^{2015} y_{2015}$ ، ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A إلى B معينا عناصره المميزة ، ثم جد العبارة المركبة له
5. لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $Z_0 = \sqrt{3} - i$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = f(A_n)$ حيث: Z_n لاحقة A_n
   نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كمايلي : $U_0 = A_0A_1$ و$U_n = A_nA_{n+1}$من أجل كل عدد طبيعي n

أ. بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الاول U_0 و أساسها q

ب. استنتج عبارة U_n بدلالة n، ثم أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 ..... + U_n$

ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_0 \times U_1 \times U_2 .... \times U_n = \left(\left(128 - 32\sqrt{3}\right)^4 \times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}$

حل التمرين

1.تعيين العددين الحقيقين a و b :

$(a+i)^2 = 2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2 = 2-2i\sqrt{3}$ ومنه : $a^2-1+2ai = 2+2i\sqrt{3}$ و $b^2-1-2bi = 2-2i\sqrt{3}$ بالمطابقة

نجد : $a=\sqrt{3}$ و $b=\sqrt{3}$

2.أ.حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+16=0$

لدينا : $\Delta = -48 = \left(4i\sqrt{3}\right)^2$ ومنه الحلول هي : $z_1 = 2+2i\sqrt{3}$ و $z_2 = 2-2i\sqrt{3}$

ب.استنتاج حلول المعادلة $z^4-4z^2+16=0$

بوضع $z^2 = L$ نستنتج أن الحلول هي : $z_1^2 = L_1 = 2+2i\sqrt{3}$ و $z_2^2 = L_2 = 2-2i\sqrt{3}$ ومنه ينتج : $z=\sqrt{3}+i; z=-\sqrt{3}-i; z=\sqrt{3}-i; z=-\sqrt{3}+i$

3.تبيان أن : $y_k = \frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$

$$y_k = \left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{k\pi}{3}-i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2^k}2i\sin\frac{k\pi}{3} = \frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$$

استنتاج أن $y_{2013}=0$: لدينا

$$y_{2013} = \frac{i}{2^{2012}}\sin\frac{2013\pi}{3} = \frac{i}{2^{2012}}\sin 671\pi = \frac{i}{2^{2012}}\sin(\pi) = 0$$

كتابة $-2^{2015}y_{2015}$ **على الشكل** $\sqrt{\alpha}i$:

لدينا :

$$-2^{2015}y_{2015} = -2^{2015}\frac{i}{2^{2014}}\sin\frac{2015\pi}{3} = -2i\sin\frac{3\times671+2}{3}\pi = -2i\sin\frac{2\pi}{3}+671\pi = -2i\sin\frac{-\pi}{3} = \sqrt{3}i$$

4.أ.تحقق أن : $z_C = \frac{3}{2}z_A + z_B$: لدينا $z_C = 5-2^{2015}y_{2015} = 5+i\sqrt{3}$

ولدينا $z_C = \frac{2}{3}\left(2+2i\sqrt{3}\right)+2-2i\sqrt{3} = 5+i\sqrt{3}$

ب.تبيان : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C} = -2^{2015}y_{2015}$: لدينا

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C} = \frac{2-2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}} = \frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = i\sqrt{3}\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = i\sqrt{3} = -2^{2015}y_{2015}$$

تحديد طبيعة التحويل f :

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C} = i\sqrt{3}$ يكافىء $z_B-z_C = i\sqrt{3}(z_A-z_C)$ ومنه : $|z_B-z_C| = \sqrt{3}|z_A-z_C|$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$

يكافىء : $CB=\sqrt{3}CA$ و $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2}$ اذن f تشابه مباشر مركزه C و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ايجاد العبارة المركبة : f تشابه مباشر مركزه C ونسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه $\alpha = i\sqrt{3}; \beta = z_C(1-\alpha) = 8-4i\sqrt{3}$

ومنه : $f : z' = i\sqrt{3}z + 8 - 4i\sqrt{3}$

5.**أ.تبيان أن (U_n) متتالية هندسية مع تحديد أساسها q و حدها الأول U_0:**

لدينا :

$$U_{n+1} = A_{n+1}A_{n+2} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|i\sqrt{3}z_{n+1} + \beta - i\sqrt{3}z_n - \beta\right| = \left|i\sqrt{3}(z_{n+1} - z_n)\right| = \left|i\sqrt{3}\right||z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}U_n$$

ومنه (U_n) هندسية أساسها $q = \sqrt{3}$ و حدها الأول

$$U_0 = |z_1 - z_0| = \left|i\sqrt{3}z_0 + 8 - 4i\sqrt{3} - z_0\right|$$
$$= \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$$

ب.استنتاج عبارة U_n بدلالة n :

$$U_n = U_0 \times q^n = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^n$$

حساب المجموع S_n بدلالة n:

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \left(\frac{\sqrt{128 - 32\sqrt{3}}}{\sqrt{3} - 1}\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^{n+1} - 1\right)$$

ج.برهان بالتراجع :

نتحقق من صحة $P(0)$ لدينا : $U_0 = \sqrt{128 - 32\sqrt{3}}$ الطرف1

$\sqrt{128 - 32\sqrt{3}} = \left(\left(128 - 32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^0\right)^{\frac{0+1}{4}}$ الطرف 2 ومنه $P(0)$ محققة

لدينا

$$U_0 \times U_1 \times .... \times U_n \times U_{n+1} = \left(\left(128 - 32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}} \times U_{n+1} = \left(\left(128 - 32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}} \times \left(128 - 32\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}^{n+1}$$

وبعد التبسيط نجد : $\left(\left(128 - 32\sqrt{3}\right)^2 \times 3^{n+1}\right)^{\frac{n+2}{4}}$

## التمرين الثاني عشر		باك تجريبي ثانويات الوادي

-1 $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

أ) احسب $P(-1)$ ، ثم عين العددين الحقيقين a و b حتى يكون : $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

-2 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C و G لواحقها على الترتيب

$z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 2 - i\sqrt{3}$ و $z_G = 3$

أ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.

ب)احسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم عين طبيعة المثلث ABC.

3- أ) اكتب $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج أن A صورة G بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب) جد مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACG.

4- أ) بين أن النقطة G مرجح الجملة $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$.

ب) عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\|$

5- أنشئ النقطة H لاحقتها $z_H = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ دون حساب ، ثم عين بطريقة هندسية عمدة للعدد المركب z_H .

حل التمرين

1- أ) $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$

	1	-3	3	7
$\alpha = -1$	1	-4	7	0

و منه : $P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$.

ب) $P(z) = 0$ يعني أن : $(z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0$ ، إذن : إما $z + 1 = 0$ و منه : $z = -1$

أو $z^2 - 4z + 7 = 0$ ، لدينا : $\Delta = -12$ ، و منه : $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ و $z_1 = 2 - i\sqrt{3}$

2- أ) لدينا : $(z_B - z_A)^n = (2 + i\sqrt{3} - (-1))^n = (3 + i\sqrt{3})^n$

و منه : $3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\quad (z_B - z_A)^n = \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = \left(2\sqrt{3}\right)^n \times e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$(z_B - z_A)^n$ عدد حقيقي سالب يعني أن : $e^{i\frac{n\pi}{6}} = e^{i(2k+1)\pi}$ ، و منه : $n = 12k + 6$

ب) $AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{3}$ و $AC = |z_C - z_A| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ و منه المثلث ABC متقايس الاضلاع.

3- أ) $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ و منه: $z_A - z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_G - z_C)$:

و منه A صورة G بالتشابه مركزه C و زاويته : $q = \frac{\pi}{2}$. و نسبته $\sqrt{3}$.

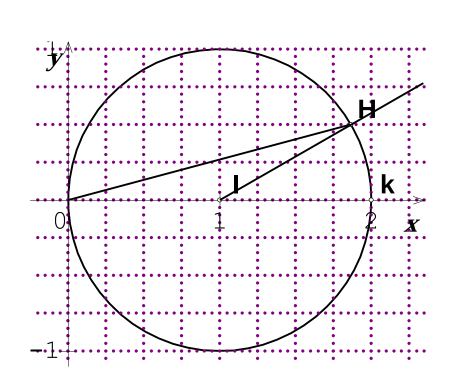
ب) المثلث ACG قائم في C و منه I مركز الدائرة المحيطية هو منتصف $[AG]$ أي: $z_I = 1$

و نصف قطرها : $R = |z_I - z_A| = 2$

4- أ) $x_G = \frac{-1(-1) + 2(2) + 2(2)}{-1 + 2 + 2} = 3$ و $y_G = \frac{-1(0) + 2(\sqrt{3}) + 2(-\sqrt{3})}{-1 + 2 + 2} = 0$

ب) لدينا : $\left\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 2\sqrt{3}$ و $\left\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{GM}\right\|$

و منه : $\left\|\overrightarrow{GM}\right\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ و هي الدائرة مركزها G و نصف قطرها $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



5- لدينا : $z_H = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، هذه الكتابة تعني أن H تنتمي إلى تقاطع الدائرة مركزها النقطة I لاحقتها $z_I = 1$ و نصف المستقيم $[IH)$ باستثناء ω الذي يحقق : $arg(z_I - z_H) = \frac{\pi}{6}$

$HOK = \frac{1}{2}HIK$ لأنهما زاوية مركزية و زاوية محيطية و تحصران نفس القوس. و $\arg(z_H) = HOK = \frac{\pi}{6}$ ، إذن : $HOK = \frac{\pi}{12}$

التمرين الثالث عشر — باك تجريبي ثانويات الوادي

1- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :
$z_A = 1 + 3i$ ، $z_B = 2 + 4i$ ، $z_C = 1 + z_A$

أ) اكتب $z_B - z_A$ على الشكل الأسي .

ب) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

2- أ) اكتب العبارة المركبة للتحاكي T الذي مركزه G و نسبته 2-.

ب) عين احداثي النقطة H سابقة النقطة C بالتحويل T ، ثم تحقق أن H منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

3- (γ) مجموعة النقط M لاحقتها z حيث : $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{4}}$ و k يتغير في $\mathbb{R}_+$.

أ) عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

ب) تحقق أن المجموعة (γ) هي نصف المستقيم $[AB)$.

4- بين أن : $\frac{z_C - z}{z_B - z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - k\right)$ ، ثم تحقق أن النقطة H تنتمي إلى (γ).

- استنتج أن المستقيمين (AB) و (CH) متعامدان.

حل التمرين

1- أ) $z_B - z_A = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ب) $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{5}{3} + i\,\frac{10}{3}$

1- أ) $z' - z_G = -2(z - z_G)$ بالتعويض : $z' - \frac{5}{3} - i\,\frac{10}{3} = -2\left(z - \frac{5}{3} - i\,\frac{10}{3}\right)$

ب) $z_C - \frac{5}{3} - i\,\frac{10}{3} = -2\left(z_H - \frac{5}{3} - i\,\frac{10}{3}\right)$ ، و منه : $z_H = \frac{3}{2} + i\,\frac{7}{2}$

$z_H = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i = \frac{z_A + z_B}{2}$ و منه هي منتصف القطعة $[AB]$.

3- أ) $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4}$

ب) لدينا : $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{4}}$ ، و منه : $z-z_A=ke^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن: $|z-z_A|=\left|ke^{i\frac{\pi}{4}}\right|=k$ و $k\in\mathbb{R}_+$

و النقطة B تحقق المعادلة لأن : $z_B-z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، إذن هي نصف المستقيم $[AB)$.

-4 $$\frac{z_C-z}{z_B-z_A}=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}-\frac{z-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}-\frac{ke^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}-\frac{k}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}-k\right)$$

نعوض بـ : z_H : نجد : $z_H-z_A=\frac{3}{2}+i\frac{7}{2}-(1+3i)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

بالمطابقة مع $z-z_A=ke^{i\frac{\pi}{4}}$: نجد : $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و منه : النقطة H تنتمي إلى (γ).

لدينا : $\frac{z_C-z_H}{z_B-z_A}=\frac{\frac{1}{2}(1-i)}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و منه نستنتج أن (AB) و (CH) متعامدان

التمرين العاشر باك تجريبي

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0\ .....(I)$
   - اكتب الحلول على الشكل المثلثي
2. المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن النقط ،و التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$
   $z_B=\sqrt{3}+i$، $z_C=\overline{z_B}$ وليكن العدد المركب L حيث : $L=\frac{(1-i)z_B}{z_C}$
   ا) اكتب العدد L على الشكل الاسي ثم احسب L^{2016}
   ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد L^n تخيلي صرف
3. ا) بين انه يوجد دوران r مركزه B ويحول A الى C ، يطلب تعيين زاويته .
   ب) استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته
4. ا) عين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب
   ب) عين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح $\mathbb{R}$

حل التمرين

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta=-4$ ومنه $z_1=\sqrt{3}-i$ او $z_2=\sqrt{3}+i$ ومنه $S=\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i\}$

كتابة الحلول على الشكل المثلثي: $z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ، $z_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

2) كتابة العدد L على الشكل الاسي ثم حساب L^{2016}

لدينا : $z_B=2e^{i\frac{\pi}{6}}$، $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$،

ومنه : $1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ $L=\frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$ $L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}e^{i2016\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}^{2016}e^{i168\pi}$

$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون L^n تخيلي صرف :

لدينا : $\mathrm{L}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، $\mathrm{L}^n=\sqrt{2}^n e^{i\left(n\frac{\pi}{12}\right)}$

L^n عدد تخيلي صرف معناه $n\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه

$n=12k+6$ ، $k\epsilon\mathbb{N}$

1) ا) نبين انه يوجد دوران r مركزه النقطة B ويحول A الى C

يطلب تعيين زاويته :

ليكن r تحويل عبارته المركبة من الشكل $z'=az+b$ حيث a،b عددان مركبان

لدينا معناه $\begin{cases}r(A)=C\\r(B)=B\end{cases}$ ومنه : $a=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $b=z_B(1-a)=2\sqrt{3}$ ومنه : $z'=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+2\sqrt{3}$ بما ان :

$|a|=\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$

فان r هو دوران مركزه B وزاويته $arg(a)=\frac{2\pi}{3}$

ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC وحساب مساحته

لدينا : $AB=BC$ و $arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=\frac{2\pi}{3}$ اذن المثلث ABC متقايس الاضلاع

لتكن $z_{B'}$ لاحقة منتصف $[AC]$، $z_{B'}=\frac{z_B+z_B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

$[BB']$ ارتفاع وعمود ومتوسط ومحور متعلق بـ : $[AC]$ في المثلث ABC المتقايس الضلعين مساحته $S=\frac{BB'\times AC}{2}$

$AC=|z_C-z_A|=2\sqrt{3}$ ، $BB'=|z_{B'}-z_B|=1$ ومنه : $S=\sqrt{3}ua$

1) ا) تعيين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون

العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب : لدينا $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}=\frac{z-z_C}{z-z_A}$

$\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب معناه $arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right)=2k\pi;k\epsilon\mathbb{Z}$ ومنه $arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right)=(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MC})=2k\pi;k\epsilon\mathbb{Z}$ ومنه (E_1) هي المستقيم (AC) باستثناء القطعة $[AC]$

ب) تعيين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون

$iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح $\mathbb{R}$

لدينا : $iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}$ اي $iz=i\left(i+\sqrt{3}+2e^{i\theta}\right)$

اي ان : $z=\sqrt{3}+i+2e^{i\theta}$

$z=z_B+2e^{i\theta}$ ، θ يمسح $\mathbb{R}$ ومنه : (E_2) هي دائرة مركزها

النقطة B ونصف قطرها 2

التمرين الحادي عشر — باك تجريبي

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $P(z) = z^4 + 8 - 8\sqrt{3}i$

1. ا) احسب العدد المركب $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم استنتج في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ حلول المعادلتين : $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ و $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

ب) تحقق انه من اجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z^2 + 2 + 2\sqrt{3}i)(z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i)$

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D ذات اللاحقات $z_A = \sqrt{3} + i$، $z_B = -1 + \sqrt{3}i$، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$ على الترتيب

ا) اكتب الاعداد المركبة A، B، C و D على الشكل الاسي .

ب) علم النقط A، B، C و D ثم بين انها تنتمي الى الدائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها

ج) بين ان : $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D} = i$ ثم اعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D}$ واستنتج طبيعة المثلث ABD

3. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

ا) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة

ب) تحقق ان $T(A) = B$، $T(B) = C$ و $T(C) = D$

ج) بين انه من اجل كل عدد مركب z : $P(z') = P(z)$

د) احسب $P(z_A)$ ثم استنتج مرة اخرى حلول المعادلة $P(z) = 0$

حل التمرين

1. ا) احسب العدد المركب $(\sqrt{3}+i)^2$

$$(\sqrt{3}+i)^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$$

استنتاج : $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ معناه $z^2 = (\sqrt{3}+i)^2$ معناه :

$z = \sqrt{3} + i$ او $z = -\sqrt{3} - i$

$z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$ معناه : $z^2 = \left(i(\sqrt{3}+i)\right)^2$

معناه $z = -1 + \sqrt{3}i$ او $z = 1 - \sqrt{3}i$

$$S = \{-\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i; 1 - \sqrt{3}i; -1 + \sqrt{3}i\}$$

ب) التحقق : $P(z) = (z^2 + 2 + 2\sqrt{3}i)(z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i)$

$= z^4 + 8 - 8\sqrt{3}i$

2. ا) اكتب الاعداد المركبة A، B، C و D على الشكل الاسي

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$، $z_C = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$،

$z_D = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$،

ب) تعليم النقط :

$OA = OB = OC = OD = 2$ ونصف قطر الدائرة هو 2

ج) $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D} = i$ و $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D} = \frac{z_A-z_D}{z_A-z_B} = \frac{z_D-z_A}{z_B-z_A} = i$ ،

التفسير : $AD = AB$ و $(\overline{AB};\overline{AD}) = \frac{\pi}{2}$

فالمثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين

3. $T: z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

ا) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة

T دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) التحقيق : $T(A) = B$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} = z_B$

$T(B) = C$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_C$

$T(C) = D$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = z_D$

ج) $P(z') = P\left(e^{i\frac{\pi}{2}}z\right) = (iz)^4 + 8 - 8\sqrt{3}i = P(z)$

د) $P(z_A) = 0$

لدينا : $P(z_A) = P(z_B)$ ومنه $P(z_B) = 0$

$P(z_B) = P(z_C)$ ومنه $P(z_C) = 0$

$P(z_C) = P(z_D)$ ومنه $P(z_D) = 0$

اذا حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي :

$$S = \{-\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i; 1 - \sqrt{3}i; -1 + \sqrt{3}i\}$$

باكالوريا

الموضوع الاول

التمرين الاول bac M 2016

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+5=0$.

ب) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية: $\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4z+1-4i\left(1-\sqrt{3}\right)=0$.

2) θ عدد حقيقي حيث : $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له .

أ) اكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي.

ب) عيّن θ علما أنّ: $\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد المركب z_0).

ج) n عدد طبيعي. من أجل قيمة θ المتحصل عليها، اكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي.

د) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

3) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_C حيث: $z_A=2-i$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$.

أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

ب) استنتج أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

ج) E النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة z_E حيث: $\begin{cases}\arg\left(z_E-z_A\right)-\arg\left(z_E-z_B\right)=\frac{\pi}{2}\\ \left|\frac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right|=2\end{cases}$.

- بيّن أنّ : $z_E=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$.
- بيّن أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة.

4) M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z ، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

أ) عيّن z_I لاحقة النقطة I .

ب) α عدد حقيقي، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تُحقّق: $z-z_I=e^{i\alpha}$.

- تحقّق أنّ النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ).
- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميّزة عندما يتغيّر α في $\mathbb{R}$.

التمرين الثاني bac S 2016

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $\left(z\neq 1\right)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث: $z'=\dfrac{z-2}{z-1}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z'=z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث: $z_1=1-i$ و $z_2=\overline{z_1}$.

أ - اكتب $\dfrac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي.

ب - بيّن أنّ النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يُطلب تعيين زاوية له.

3) نضع $z\neq z'$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

عيّن $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ $\left(\Gamma\right)$.

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ وعناصره المميّزة .

ب - اكتب العبارة المركبة للتحويل S.

جـ - عيّن ثمّ أنشئ المجموعة $\left(\Gamma'\right)$ صورة $\left(\Gamma\right)$ بالتحويل النقطي S.

التمرين الثالث bac TM 2016

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب:

$z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}i$ و $z_B=\overline{z_A}$.

أ- اكتب كلاّ من z_A و z_B على الشكل الأسي. ب- بيّن أنّ: $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$.

جـ- عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)^{n}$ عددا حقيقيا.

3) f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)z$.

أ- عيّن طبيعة التحويل النقطي f و عناصره المميّزة.

ب- احسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f .

جـ- عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

التمرين الرابع bac M 2017

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية : $2z^2-10z+\dfrac{29}{2}=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النّقط A، B، C و D التي لاحقاتها $z_A=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=\dfrac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$، $z_C=-\overline{z}_A$ و $z_D=i$.

1) أ) اكتب العددين z_A و z_B على الشّكل الجبري ثمّ علِّم النّقط A ، B ، C و D في المعلم السّابق.

ب) اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ على الشّكل الأسّي ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) جد لاحقة النّقطة E نظيرة B بالنسبة إلى D ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ABCE$.

3) اكتب العبارة المركبة للتّشابه المباشر S الذي مركزه B ويحوّل A إلى D ثمّ حدّد نسبته وزاويته.

4) نعرّف متتالية النّقط $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كما يلي : $A_0 = A$ و $A_{n+1} = S(A_n)$. (z_n هي لاحقة A_n)

أ) برهن بالتّراجع أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n - z_B = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{4}(n+1)}$.

ب) عيّن قيم n الطبيعية حتّى تنتمي النّقط A_n إلى المستقيم (AB) .

التمرين الخامس　　bac S 2017

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z+2)(z^2 - 4z + 8) = 0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النّقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$

1) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي.

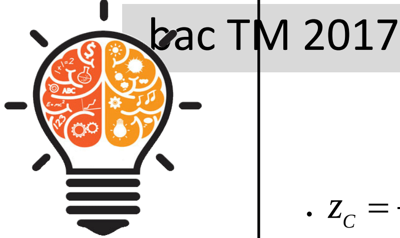
2) عيّن z_D لاحقة النّقطة D حتى تكون النّقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

3) (Γ) مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث $\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \frac{\pi}{2}$.

تحقّق أنّ مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثمّ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C ونسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.



التمرين السادس　　bac TM 2017

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها : $z_A = -1$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = -i$.

1) اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C ويحول B الى A .

3) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة الى C والنقطة E صورة D بالتشابه S .

أ) عيّن z_D لاحقة D ثم تحقق أنّ: $z_E = 1 - 2i$ حيث z_E لاحقة E .

ب) حدّد طبيعة الرباعي $ADEB$.

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z . (M تختلف عن A و B)

حيث $\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad ; \; k\in\mathbb{Z}$.

تحقق أنّ النقطة C تنتمي الى (Γ)، ثم حدّد طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

التمرين السابع bac M 2018

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، θ عدد حقيقي من المجال $]-\pi;\pi]$

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$(z^2-2z+2)(z^2-2(\sin\theta)z+1)=0$$

II. A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب

$z_A=-\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ، $z_B=1-i$ ، $z_C=\sin\theta+i\cos\theta$ و $z_D=\overline{z_C}$ (يرمز $\overline{z}_c$ الى مرافق z_c)

1) اكتب الأعداد z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي.

2) E نقطة من المستوي لاحقتها z_E حيث $z_E=\frac{z_A}{z_B}$.

- بيّن أن النقط C، D و E تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{\pi}{4}$ ونسبته ($2\sqrt{2}-2$).

- عيّن قيمة θ حتى تكون النقطة B صورة النقطة C بالتشابه المباشر S .

4) نضع $\theta=\frac{-3\pi}{4}$.عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(z_D)^n$ تخيليا صرفا.

التمرين الثامن bac S 2018

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-\sqrt{3}\,z+1=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث :

$Z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $Z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ و $z_C=\overline{z}_B$ (يُرمز بـ $\overline{z}_B$ لمرافق z_B)

اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3) أ) تحقّق أنّ: $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدّد طبيعة المثلث OBC .

ب) استنتج أنّ: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة.

4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z|=\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r.

التمرين التاسع bac TM 2018

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $z_B=\overline{z_A}$ ($\overline{z_A}$ يرمز الى مرافق z_A)

1) اكتب على الشكل الأسّي كل من العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ، ثم بيّن أنّ العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف .

2) لتكن النقطة C صورة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ونسبته (-3).

بيّن أنّ لاحقة النقطة C هي $z_C=-\sqrt{2}+i3\sqrt{2}$

3) احسب z_D لاحقة النقطة D صورة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $(-\frac{\pi}{2})$.

4) أ) بيّن أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=-i$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

ب) اوجد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا.

التمرين العاشر bac M 2019

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D

حيث: $z_A=1+i\sqrt{2}$ ، $z_B=i$ ، $z_C=\overline{z_A}$ ، $z_D=\overline{z_B}$ و $z_E=1$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2+1)(z^2-2z+3)=0$

2) أ) احسب كلاًّ من $|z_A-1|$ ، $|z_B-1|$ و $|z_C-z_E|$ ثم تحقّق أنّ النقط الأربعة A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدّائرة التي يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها.

ب) بيّن أنّ: $z_B-z_E=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(z_A-z_E)$ ثم استنتج أنّ B هي صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة.

- ما طبيعة المثلّث ABE ؟

3) عيّن لاحقتي الشّعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$ محدّدا طبيعة الرباعي $ABDE$.

4) $\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ شعاعان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 .

أ) برهن أنّ: ($\overrightarrow{w_1}$ و $\overrightarrow{w_2}$ متعامدان) يكافئ ($z_1.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2=0$).

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $(z-z_A)(\overline{z}-z_D)+(z-z_B)(\overline{z}-z_C)=0$

التمرين الحادي عشر bac S 2019

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

1) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z)=\dfrac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)|=\dfrac{1}{2}$

ب) بيّن أن العدد $\left[f(i)\right]^{1440}$ حقيقي موجب.

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$.

أ) عيّن لاحقة D صورة B بالدوران r وبيّن أنّ النقط D، A و C في استقامية.

ب) استنتج أنّ D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره .

التمرين الثاني عشر　　bac TM 2019

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C النّقط التي لاحقاتها على التّرتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=\dfrac{3}{2}+i\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(Γ) الدّائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها 1 .

1) أ) تحقّق أنّ النّقطة C من الدّائرة (Γ).

ب) عيّن قيسا بالراديان للزّاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ ثم استنتج أنّ C صورة B بالدوران r الذي مركزه A يطلب تعيين زاويته.

2) S التّشابه المباشر الذي يحوّل النّقطة M ذات اللاحقة z إلى النّقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+\sqrt{3}-i\sqrt{3}$$

أ) حدّد العناصر المميزة للتّشابه S .

ب) عيّن z_D لاحقة D صورة B بالتشابه S.

3) ماهي نسبة التّحاكي h الذي مركزه A حيث $S=h\circ r$ ؟ استنتج أنّ النقط A ، C و D في استقامية.

4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k\in\mathbb{R}_+^*$

– تحقّق أنّ النقطة C من المجموعة (E). ثم حدّد طبيعة (E) .

الموضوع الثاني

التمرين الاول bac M 2016

I) 1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$.

2) جد العددين المركبين z_1 و z_2 حيث: $\begin{cases}2z_1-3z_2=5i\sqrt{2}\\ z_1+3z_2=-2i\sqrt{2}\end{cases}$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. النقط A ، B ، C ، D و H لاحقاتها على الترتيب : $z_A=i\sqrt{2}$ ، $z_B=-i\sqrt{2}$ ، $z_C=1+i$ ، $z_D=1-i$ و $z_H=\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ حيث E النقطة التي تُحقق: $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO}$.

1) اكتب z_H على الشكل الأسي و استنتج نوع المثلث BEC .

2) S تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=z_A z+z_B$.

أ) ما هي طبيعة التحويل S ؟ و ما هي عناصره المميّزة ؟

ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي مركزها C و نصف قطرها CD.

ج) عيّن (γ') صورة (γ) بالتحويل S و استنتج مساحتها.

3) عيّن (δ) مجموعة النقط M من المستوي (M تختلف عن B و C) ذات اللاحقات z التي يكون من أجلها العدد $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقيا سالبا تماما.

التمرين الثاني bac S 2016

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;u,v\right)$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ، $z_B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) أ) عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثمّ حدّد بدقة طبيعته.

ب) عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z .

ج) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$ ثم تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

التمرين الثالث bac TM 2016

I) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$\left(z^2-2\sqrt{2}\,z+4\right)\left(2z-\sqrt{2}\right)=0 \ .$$

2) اكتب الحلول على الشكل الأسي.

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;u,v\right)$. نعتبر النقط A ، B و C من المستوي التي لواحقها على الترتيب: $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $c=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

1) علّم النقط A، B و C في المعلم السابق.

2) نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S الذي مركزه A و نسبته 3 و زاويته π و النقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

- احسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب.

III) نضع : $z=\frac{d-b}{e-b}$.

1) اكتب العدد المركب z على الشكل المثلثي.

2) نعتبر النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[DE]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة I.

ما طبيعة الرباعي $BDFE$؟

التمرين الرابع bac M 2017

I) اكتب العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $\frac{21}{4}+5i$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A , B , C و I ذات اللواحق : $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z}_A$ و $z_I=i$.

1) اكتب z_A و z_C على الشكل الجبري .

2) اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي مستنتجا طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A إلى I .

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ثم عيّن نسبته وزاويته.

ب) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي: $T_n=\underbrace{S\circ S\circ\cdots\circ S}_{n\text{ مرة}}$

عيّن قيم n حتى يكون T_n تحاكيا ، عين عندئذ عناصره المميزة.

التمرين الخامس bac S 2017

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;u,v)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$.

2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)\times(\overline{z}+2)=|z+2|^2$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$.

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ ونصف القطر 9 .

5) من أجل كل عدد حقيقي α: إذا كان $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

فإنّ: $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

التمرين السادس bac TM 2017

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;u,v)$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها : $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z}_A$ ، $z_C=\frac{1}{2}(1-i)$ و $z_D=\overline{z}_C$.

1) أ) اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي للعددين z_B و z_D .

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n=(z_B)^n$.

2) أ) اوجد نسبة ومركز التحاكي h الذي يحول D إلى A ويحول C إلى B .

ب) احسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

3) جد z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;2),(C;-1),(D;-1)\}$.

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$.

بيّن أنّ A نقطة من (Γ)، ثم حدد طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة وأنشئها.

التمرين السابع bac M 2018

1) m عدد حقيقي ، نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+(m+1)z+(2m-1)=0.....(E)$$

ـ عيّن قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين مركبين غير حقيقيين.

2) نضع $m=3$، حل المعادلة (E).

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C و E التي لاحقاتها $z_A=-2+i$ ، $z_B=-2-i$ ، $z_C=\alpha$ و $z_E=\sqrt{3}$ ، حيث α عدد حقيقي و $\alpha>-2$.

- بيّن أنّ قيمة α التي يكون من أجلها المثلث ABC متقايس الأضلاع هي $\left(-2+\sqrt{3}\right)$.
- نضع في كل ما يأتي $z_C=-2+\sqrt{3}$:

4) اكتب العدد المركب: $\dfrac{z_C-z_E}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسي ثم استنتج أن :

أ) المستقيمان (AB) و (EC) متعامدان.

ب) النقط A ، B و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

5) ليكن r الدوران الذي يحوّل النقطة B إلى C و يحوّل C إلى A ، عبارته المركبة هي:
$z'=az+\left(\dfrac{\sqrt{3}-6}{2}\right)+i\left(\dfrac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ حيث a عدد مركب.

أ) احسب العدد المركب a ثم استنتج زاوية الدوران r.

ب) تحقق أنّ النقطة G مركز ثقل المثلث ABC هي مركز الدوران r.

التمرين الثامن   bac S 2018

I) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\bar{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ (يرمز $\bar{z}$ لمرافق العدد z)

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\bar{z}_A$.

1) تحقق أنّ $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث:
$$\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A|\\ Arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$
بيّن أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و احسب z_D.

3) احسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D.

4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث: $Arg\left(\dfrac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$

التمرين التاسع bac TM 2018

I) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $4z^2-2z+1=0$ ... (E)

ب) اكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E).

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A، B و C لاحقاتها $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1) أ) احسب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC.

ب) استنتج أن B هي صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

2) اوجد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

3) حدّد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تُحقق ما يلي:
$|iz+\sqrt{3}-i|=|z-1+i\sqrt{3}|$.

4) بيّن أنّ النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ).

التمرين العاشر bac M 2019

1) نضع من أجل كل عدد مركب z ، $P(z)=z^4-6z^3+29z^2-24z+100$

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد مركب z، $\overline{P(z)}=P(\overline{z})$، ثم استنتج أنّه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z)=0$ فإنّ $\overline{z}$ حل لها.

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ علما أنّها تقبل حلا تخيليا صرفا.

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B، M و M' التي لاحقاتها على الترتيب: $2i$ ، $3-4i$، z و z' حيث: $z'=\frac{-iz+4+3i}{z-2i}$ مع $z\neq 2i$.

ولتكن I مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1)\}$ و J مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;1)\}$

أ) عيّن اللاحقتين z_I و z_J للنقطتين I و J على الترتيب.

ب) لتكن (E) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $|z'|=2$.

بيّن أن (النقطة M من (E)) يكافئ ($\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JM}=0$)، ثمّ عيّن (E) وأنشئها.

جـ) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $\arg(z')=2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

تحقّق أنّ النقطة D ذات اللاحقة $\frac{9}{2}-\frac{5}{2}i$ تنتمي إلى (Γ)، ثمّ عيّن وأنشئ (Γ).

3) عيّن الشكل الجبري لِلاحقة النقطة G تقاطع المجموعتين (E) و (Γ).

التمرين الحادي عشر   bac S 2019



المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النّقط A، B و C التي لاحقاتها z_A، z_B و z_C على التّرتيب حيث:

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

1) أ) اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسي .

ب) احسب العدد $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\dfrac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2) أ) T الانسحاب الذي يحوّل A إلى C، عيّن z_D لاحقة النّقطة D صورة B بالانسحاب T.

ب) استنتج طبيعة الرّباعي $ABDC$.

3) اكتب العدد المركب z_C-z_A على الشكل الأسي.

4) جد قيم العدد الطّبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\dfrac{-6\sqrt{2}}{z_C-z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5) لتكن M نقطة كيفيّة من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C .

عيّن (E) مجموعة النّقط M التي من أجلها يكون $\dfrac{z_A-z}{z_C-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

التمرين الثاني عشر   bac TM 2019

I) أ) تحقق أنّ: $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2=16-8\sqrt{3}$.

ب) عيّن على الشكل الجبري الجذرين التّربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركّب Z حيث : $Z=-16\sqrt{3}-16i$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي

لاحقاتها $z_A=4e^{i\frac{\pi}{3}}+4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_B=\dfrac{1}{2}iz_A$ و $z_C=-\dfrac{1}{4}z_A$.



1) اكتب z_A على الشكل الجبري ، ثمّ بيّن أن $z_A=4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

2) استنتج القيمتين المضبوطتين للعددين الحقيقيين $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

3) S التشابه المباشر الذي يحوّل A إلى B و يحوّل B إلى C .

لتكن M' النقطة ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاّحقة z بالتّشابه S.

أ) بيّن أنّ: $z'=\dfrac{1}{2}iz$. ب) حدّد العناصر المميزة للتّشابه S.

4) G النّقطة ذات اللاّحقة z_G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;4)\}$.

أ) بيّن أنّ : $z_G=2e^{i\frac{\pi}{3}}$. ب) (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث:

$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{2}$

– حدّد طبيعة (E) وعناصرها المميّزة، ثم احسب محيط (E') صورة (E) بالتشابه S.